第七次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 8 日

截止日期 2023 年 4 月 15 日

1. 写出使得下列矩阵 A 消元成上三角矩阵的消元矩阵 $E21, E_{32}$，并写出其 LU 分解。(回顾 $A = E_{32}E_{21}U$)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 判断下列两个矩阵是否是可逆矩阵，如果是的话请给出其逆矩阵。
$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. 证明，对下列的矩阵 A, 如果 $a \neq 0, a \neq b$，则 A 是可逆矩阵，并求出其逆矩阵 (用 a, b 表示)。再寻找出 c 的三个赋值使得矩阵 C 不是可逆的。
$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{bmatrix}$$

4. 考虑如下的矩阵：
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$
   - 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form)，并求其秩。
   - 给出其零空间 $N(A)$ 的一组基。

5. 我们课上已经证明，对矩阵进行行交换不改变其列秩，请证明对于行加法和行乘法也是如此，即令：
$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$
   我们有：
$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$
   并且请举个例子表明列空间是可以不相同的：$C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$.

6. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

   - 考虑 $n = 3$ 的例子，令 $U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$，$V = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$。证明 $dim(U) = dim(V) = 2$ 并且 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
   - 证明当 $dim(U) + dim(V) > n$ 的时候，$U \cap V$ 必然蕴含非零的元素。