第七次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 4 月 15 日

Remark 0.1

非常抱歉各位同学，上周出题的时候过多估计了周五的上课进度，周五上完课的时候我也确实是忘记了这件事，导致第 4 题和第 5 题本来是想在讲完之后再让大家做，但实际造成了大家可能做的时候还并没有完全讲到。后续我会尽量避免这种情况，再次致歉。

1. 写出使得下列矩阵 A 消元成上三角矩阵的消元矩阵 $E21, E_{32}$，并写出其 LU 分解。(回顾 $A = E_{32}E_{21}U$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

证明. 矩阵 A 的消元过程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

从而对应的:

$$E_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad , E_{32}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

从而有 $A = E_{32}(4)E_{21}(2)U$，其中

$$E_{32}(4)E_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

即:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

□

2. 判断下列两个矩阵是否是可逆矩阵，如果是的话请给出其逆矩阵。

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

证明. 对 C 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\0&\frac{4}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\0&-1&2&-1\\0&-\frac{2}{3}&-1&\frac{5}{3}\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\0&\frac{4}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\0&0&\frac{5}{4}&-\frac{5}{4}\\0&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\0&\frac{4}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\0&0&\frac{5}{4}&-\frac{5}{4}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

C 没有 4 个首元，从而 C 不是可逆的。

对 F 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&3&-1&0\\0&-2&3&-1\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&-2&3&-1\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&-1\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以其可逆矩阵为:

$$\begin{bmatrix}F&I\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}I&F^{-1}\end{bmatrix}\longrightarrow F^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{15}{8}&\frac{7}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{7}{8}&\frac{7}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

□

3. 证明，对下列的矩阵 A, 如果 $a\neq 0, a\neq b$, 则 A 是可逆矩阵，并求出其逆矩阵 (用 a, b 表示)。再寻找出 c 的三个赋值使得矩阵 C 不是可逆的。

$$A=\begin{bmatrix}a&b&b\\a&a&b\\a&a&a\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&c&c\\c&c&c\\8&7&c\end{bmatrix}$$

证明. 对 A 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix}a&b&b\\a&a&b\\a&a&a\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&b&b\\0&a-b&0\\0&a-b&a-b\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&b&b\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{bmatrix}$$

从而当 $a\neq 0, a\neq b$ 时矩阵 A 有 3 个首元，所以 A 是可逆的。其逆矩阵可以进一步通过消元求得:

$$\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\a&a&b&0&1&0\\a&a&a&0&0&1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\0&a-b&0&-1&1&0\\a&a&a&0&0&1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\0&a-b&0&-1&1&0\\0&a-b&a-b&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\0&a-b&0&-1&1&0\\0&0&a-b&0&-1&1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&b&0&1&\frac{b}{a-b}&-\frac{b}{a-b}\\0&a-b&0&-1&1&0\\0&0&a-b&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}a&0&0&\frac{a}{a-b}&0&-\frac{b}{a-b}\\0&a-b&0&-1&1&0\\0&0&a-b&0&-1&1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{a-b}&0&-\frac{b}{a(a-b)}\\0&1&0&-\frac{1}{a-b}&\frac{1}{a-b}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{a-b}&\frac{1}{a-b}\end{bmatrix}$$

即：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a-b} & 0 & -\frac{b}{a(a-b)}\\ -\frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} & 0\\ 0 & -\frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b}\end{bmatrix}$$

使 C 是不可逆的关键在于让其没有 3 个首元，所以对其消元可得：

$$\begin{bmatrix}2 & c & c\\ c & c & c\\ 8 & 7 & c\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & c & c\\ 0 & c-\frac{c^2}{2} & c-\frac{c^2}{2}\\ 0 & 7-4c & -3c\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & c & c\\ 0 & c-\frac{c^2}{2} & c-\frac{c^2}{2}\\ 0 & 0 & c-7\end{bmatrix}$$

从而当 $c-7=0$ 或者 $c-\frac{c^2}{2}=0$ 即 $c=7,0,2$ 时其没有 3 个首元，从而是不可逆的。 □

4. 考虑如下的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 7 & 6\\ 2 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

- 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form)，并求其秩。
- 给出其零空间 $N(A)$ 的一组基。

证明. 对 A 进行消元法得：

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 7 & 6\\ 2 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

从而其秩为 2。

x_3, x_4 是自由变量，所以其零空间的两个特殊解为：

$$\mathbf{s}_1=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{s}_2=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

所以其零空间的一组基为：$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$，即：

$$N(A)=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

□

5. 我们课上已经证明，对矩阵进行行交换不改变其列秩，请证明对于行加法和行乘法也是如此，即令：

$$A=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_i-k\mathbf{a}_j\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix},\quad A''=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ k\mathbf{a}_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$$

我们有：

$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$

并且请举个例子表明列空间是可以不相同的：$C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$.

证明. 我们首先举一个例子说明：$C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$，令：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

可以看到 A' 是由 A 经过行加法 (第二行 = 第二行 + 第一行的-1 倍) 得到的，A'' 是由 A 经过行乘法 (第二行 = 第二行的 2 倍) 得到的。我们有：

- $C(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- $C(A') = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
- $C(A'') = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

从而我们可以看到 $C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$。

下面我们证明：

$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$

与行交换相同的思路，令 A 的列向量为 $A_1, \dots A_n$，A' 的列向量为 $A'_1, \dots A'_n$，A'' 的列向量为 $A''_1, \dots A''_n$。我们证明对任意的 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq n$ 有：

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_t}\text{线性无关} \iff A'_{i_1}, \dots, A'_{i_k}\text{线性无关} \iff A''_{i_1}, \dots, A''_{i_t}\text{线性无关}$$

- 先证 $A_{i_1}, \dots, A_{i_t}$线性无关 $\iff A'_{i_1}, \dots, A'_{i_t}$线性无关. 注意到：

$$\begin{aligned}
&A_{i_1}, \dots, A_{i_t}\text{线性无关} \\
\iff& c_1 A_{i_1} + \cdots + c_t A_{i_t} = 0 \iff c_1 = \cdots = c_t = 0 \\
\iff& \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{只有零解} \\
\iff& \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,i} - kA_{i_1,j} & \cdots & A_{i_t,i} - kA_{i_t,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{只有零解} \\
\iff& \begin{bmatrix} A'_{i_1} & \cdots & A'_{i_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = 0\text{只有零解} \\
\iff& A'_{i_1}, \dots, A'_{i_t}\text{线性无关}
\end{aligned}$$

- 再证 $A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}$线性无关 $\iff A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}$线性无关，注意到：

$$\begin{aligned}
&A_{i_1},\dots,A_{i_t}\text{线性无关}\\
\iff& c_1A_{i_1}+\cdots+c_tA_{i_t}=0 \iff c_1=\cdots=c_t=0\\
\iff& \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解}\\
\iff& \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ kA_{i_1,i} & \cdots & kA_{i_t,i}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解}\\
\iff& \begin{bmatrix} A''_{i_1} & \cdots & A''_{i_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=0\text{只有零解}\\
\iff& A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}\text{线性无关}
\end{aligned}$$

从而我们有：

$A_{i_1},\dots,A_{i_t}$是 $C(A)$ 的一组基 $\iff A'_{i_1},\dots,A'_{i_k}$是 $C(A')$ 的一组基 $\iff A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}$是 $C(A'')$ 的一组基

即：

$$column-rank(A)=column-rank(A')=column-rank(A'')$$

□

6. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

- 考虑 $n=3$ 的例子，令 $U=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$，$V=\{(x,y,z)\mid -x+2y+z=0\}$。证明 $dim(U)=dim(V)=2$ 并且 $U\cap V$ 蕴含非零的元素。
- 证明当 $dim(U)+dim(V)>n$ 的时候，$U\cap V$ 必然蕴含非零的元素。

证明.

- 注意到 $(1,-1,0),(1,0,-1)\in U$ 且其线性无关，并且任一 $\mathbf{w}=(a,b,c)\in U$ 我们有：

$$\mathbf{w}=-b(1,-1,0)-c(1,0,-1)$$

从而 $dim(U)=2$.
注意到 $(2,1,0),(1,0,1)\in U$ 且其线性无关，并且任一 $\mathbf{w}=(a,b,c)\in V$ 我们有：

$$\mathbf{w}=b(2,1,0)+c(1,0,1)$$

从而 $dim(V)=2$.
最后注意到：

$$\begin{aligned}(-1,-2,3)&=2(1,-1,0)-3(1,0,-1)\in U\\ (-1,-2,3)&=-2(2,1,0)+3(1,0,1)\in V\end{aligned}$$

从而 $(-1,-2,3)\in U\cap V$，即 $U\cap V$ 蕴含非零的元素。

- 不妨令 $dim(U)=r_u, dim(V)=r_v$。则:

  (1) 设 U 的一组基为 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_{r_u}$.
  (2) 设 V 的一组基为 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_{r_v}$.

  由题设 $r_u+r_v>n$,从而 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_{r_u},\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_{r_v}$ 是线性相关的,即存在不全为 0 的 $c_1,\cdots,c_{r_u}$ 和 $d_1,\cdots,d_{r_v}$ 使得:

  $$c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_{r_u}\mathbf{u}_{r_u}+d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_{r_v}\mathbf{v}_{r_v}=\mathbf{0}$$

  令 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_{r_u}\mathbf{u}_{r_u}$，则 $\mathbf{w}\in U$，并且:

  $$\mathbf{w}=-(d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_{r_v}\mathbf{v}_{r_v})\in V$$

  从而 $\mathbf{w}\in U\cap V$，且 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$，即 $U\cap V$ 蕴含非零的元素。

$\square$