第七次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 8 日

截止日期　2023 年 4 月 15 日

1. 按照要求构造相应矩阵 A:
   - 其列空间 $C(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$，其零空间 $N(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$。
   - 其列空间 $C(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，其零空间 $N(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$。

2. 考虑如下的矩阵:
$$A=\begin{bmatrix}2&4&6&4\\2&5&7&6\\2&3&5&2\end{bmatrix}$$
   - 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form)，并求其秩。
   - 给出其零空间 $N(A)$ 的基。
   - 对 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}$，给出方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的结构。

3. 给出 b_1,b_2,b_3,b_4 所需满足的条件，使得下述方程组有解:
   - $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\2&5\\3&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&5&7\\3&9&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$

4. 令 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，并且 $rank(A)=r$, $Gauss{-}Jordan$ 消元法将其变成了如下形式的矩阵:
$$\begin{bmatrix}I_r&F\\0&0\end{bmatrix}$$
   这里 I_r 是 $r\times r$ 的单位矩阵, F 是 $r\times(n-r)$ 的矩阵。定义矩阵 $B=\begin{bmatrix}-F\\I_{n-r}\end{bmatrix}$, 证明 $C(B)=N(A)$。

5. 我们课上已经证明，对矩阵进行行交换不改变其列秩，请证明对于行加法和行乘法也是如此，即令：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

我们有：

$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$

并且请举个例子表明列空间是可以不相同的：$C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$.

6. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

   - 考虑 $n = 3$ 的例子，令 $U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$，$V = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$。证明 $dim(U) = dim(V) = 2$ 并且 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
   - 证明当 $dim(U) + dim(V) > n$ 的时候，$U \cap V$ 必然蕴含非零的元素。