第七次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 15 日

1. 按照要求构造相应矩阵 A:

   - 其列空间 $C(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$，其零空间 $N(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$。
   - 其列空间 $C(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，其零空间 $N(A)$ 包含 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$。

证明.

- A 是一个 3×3 的矩阵，从而可以构造如下满足条件的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 3 & -2\\5 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

- A 是一个 3×4 的矩阵，从而可以构造如下满足条件的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -3\\1 & 1 & 1 & -3\\1 & 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

□

2. 考虑如下的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\2 & 5 & 7 & 6\\2 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

   - 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form)，并求其秩。
   - 给出其零空间 $N(A)$ 的基。
   - 对 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}$，给出方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的结构。

证明. 对 A 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\2 & 5 & 7 & 6\\2 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 4\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & -4\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

从而其秩为 2。

x_3, x_4 是自由变量，所以其零空间的两个特殊解为：

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以其零空间的一组基为：$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$，即：

$$N(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

最后对于 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$，注意到其一组特解：

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而其解的形式为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1 \mathbf{s}_1 + c_2 \mathbf{s}_2$$

□

3. 给出 b_1, b_2, b_3, b_4 所需满足的条件，使得下述方程组有解：

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

证明.

- 我们对其增广矩阵进行消元：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \\ 2 & 5 & b_3 \\ 3 & 9 & b_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 3 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 3 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 3b_3 + 3b_1 \end{bmatrix}$$

从而 b_1, b_2, b_3, b_4 需要满足的条件为：

$$\begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_4 - 3b_3 + 3b_1 = 0 \end{cases}$$

- 我们对其增广矩阵进行消元：

$$\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\2&4&6&b_2\\2&5&7&b_3\\3&9&12&b_4\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&1&1&b_3-2b_1\\0&3&3&b_4-3b_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\0&1&1&b_3-2b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&3&3&b_4-3b_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\0&1&1&b_3-2b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&0&0&b_4-3b_3+3b_1\end{bmatrix}$$

从而 b_1, b_2, b_3, b_4 需要满足的条件为：

$$\begin{cases}b_2-2b_1=0\\b_4-3b_3+3b_1=0\end{cases}$$

□

Remark 0.1

非常抱歉，我一开始把题目出成了 $b_1\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$ 的版本，但也不是说完全不能做。通过类似的过程我们可得对应得两个方程组消元后得形式为：

$$\begin{bmatrix}1&2&b_1^2\\0&1&b_1b_3-2b_1^2\\0&0&b_1b_2-2b_1^2\\0&0&b_1b_4-3b_1b_3+3b_1^2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&2&3&b_1^2\\0&1&1&b_1b_3-2b_1^2\\0&0&0&b_1b_2-2b_1^2\\0&0&0&b_1b_4-3b_1b_3+3b_1^2\end{bmatrix}$$

所以需要满足的条件均为：

$$\begin{cases}b_1b_2-2b_1^2=0\\b_1b_4-3b_1b_3+3b_1^2=0\end{cases}$$

4. 令 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，并且 $rank(A)=r$, $Gauss\!-\!Jordan$ 消元法将其变成了如下形式的矩阵：

$$\begin{bmatrix}I_r&F\\O&O\end{bmatrix}$$

这里 I_r 是 $r\times r$ 的单位矩阵, F 是 $r\times(n-r)$ 的矩阵。定义矩阵 $B=\begin{bmatrix}-F\\I_{n-r}\end{bmatrix}$, 证明 $C(B)=N(A)$。

证明. 注意到 $dim(N(A))=dim(C(A))=n-r$，令 B 的列向量是 $\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_{n-r}$，我们只需证明 B 的每个列向量都在 $N(A)$ 中即可，即：$\forall i\in[n-r], A\mathbf{b}_i=\mathbf{0}$，也即：

$$AB=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0\end{bmatrix}_{m\times(n-r)}$$

事实上我们有：

$$AB=\begin{bmatrix}I_r&F\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-F\\I_{n-r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-I_rF+FI_{n-r}\\-O_{(m-r)\times r}F+O_{(m-r)\times(n-r)}I_{n-r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-F+F\\O_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}=O_{m\times(n-r)}$$

□

Remark 0.2

最后的运算要注意到 F 是一个 $r \times (n-r)$ 的矩阵，从而我们可以利用分块矩阵的思想。这里出现了很多全零的矩阵，但需要注意到其形式（行列）个数是不同的，为了方便大家理解，我将每个全零矩阵的行列个数都在下标写了出来。

5. 我们课上已经证明，对矩阵进行行交换不改变其列秩，请证明对于行加法和行乘法也是如此，即令：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

我们有：

$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$

并且请举个例子表明列空间是可以不相同的：$C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$.

证明. 我们首先举一个例子说明：$C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$，令：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

可以看到 A' 是由 A 经过行加法 (第二行 = 第二行 + 第一行的-1 倍) 得到的，A'' 是由 A 经过行乘法 (第二行 = 第二行的 2 倍) 得到的。我们有：

- $C(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- $C(A') = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
- $C(A'') = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

从而我们可以看到 $C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$。

下面我们证明：

$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$

与行交换相同的思路，令 A 的列向量为 $A_1, \dots A_n$，A' 的列向量为 $A'_1, \dots A'_n$，A'' 的列向量为 $A''_1, \dots A''_n$。我们证明对任意的 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq n$ 有：

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_t} \text{线性无关} \iff A'_{i_1}, \dots, A'_{i_k} \text{线性无关} \iff A''_{i_1}, \dots, A''_{i_t} \text{线性无关}$$

- 先证 $A_{i_1},\dots,A_{i_t}$线性无关 $\Longleftrightarrow A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}$线性无关. 注意到:

$$
\begin{aligned}
& A_{i_1},\dots,A_{i_t}\text{线性无关} \\
\Longleftrightarrow & c_1A_{i_1}+\cdots+c_tA_{i_t}=0 \Longleftrightarrow c_1=\cdots=c_t=0 \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{只有零解} \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,i}-kA_{i_1,j} & \cdots & A_{i_t,i}-kA_{i_t,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{只有零解} \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A'_{i_1} & \cdots & A'_{i_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = 0\text{只有零解} \\
\Longleftrightarrow & A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}\text{线性无关}
\end{aligned}
$$

- 再证 $A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}$线性无关 $\Longleftrightarrow A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}$线性无关，注意到:

$$
\begin{aligned}
& A_{i_1},\dots,A_{i_t}\text{线性无关} \\
\Longleftrightarrow & c_1A_{i_1}+\cdots+c_tA_{i_t}=0 \Longleftrightarrow c_1=\cdots=c_t=0 \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{只有零解} \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{i_1,i} & \cdots & kA_{i_t,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{只有零解} \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A''_{i_1} & \cdots & A''_{i_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = 0\text{只有零解} \\
\Longleftrightarrow & A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}\text{线性无关}
\end{aligned}
$$

从而我们有:

$A_{i_1},\dots,A_{i_t}$是 $C(A)$ 的一组基 $\Longleftrightarrow A'_{i_1},\dots,A'_{i_k}$是 $C(A')$ 的一组基 $\Longleftrightarrow A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}$是 $C(A'')$ 的一组基

即:

$$column-rank(A)=column-rank(A')=column-rank(A'')$$

$\square$

6. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

- 考虑 $n = 3$ 的例子，令 $U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$，$V = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$。证明 $dim(U) = dim(V) = 2$ 并且 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
- 证明当 $dim(U) + dim(V) > n$ 的时候，$U \cap V$ 必然蕴含非零的元素。

证明.

- 注意到 $(1, -1, 0), (1, 0, -1) \in U$ 且其线性无关，并且任一 $\mathbf{w} = (a, b, c) \in U$ 我们有：

  $$\mathbf{w} = -b(1, -1, 0) - c(1, 0, -1)$$

  从而 $dim(U) = 2$.
  注意到 $(2, 1, 0), (1, 0, 1) \in U$ 且其线性无关，并且任一 $\mathbf{w} = (a, b, c) \in V$ 我们有：

  $$\mathbf{w} = b(2, 1, 0) + c(1, 0, 1)$$

  从而 $dim(V) = 2$.
  最后注意到：

  $$(-1, -2, 3) = 2(1, -1, 0) - 3(1, 0, -1) \in U$$
  $$(-1, -2, 3) = -2(2, 1, 0) + 3(1, 0, 1) \in V$$

  从而 $(-1, -2, 3) \in U \cap V$，即 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
- 不妨令 $dim(U) = r_u, dim(V) = r_v$。则：

  (1) 设 U 的一组基为 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{r_u}$.
  (2) 设 V 的一组基为 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{r_v}$.

  由题设 $r_u + r_v > n$，从而 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{r_u}, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{r_v}$ 是线性相关的，即存在不全为 0 的 $c_1, \cdots, c_{r_u}$ 和 $d_1, \cdots, d_{r_v}$ 使得：

  $$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{r_u}\mathbf{u}_{r_u} + d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_{r_v}\mathbf{v}_{r_v} = \mathbf{0}$$

  令 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{r_u}\mathbf{u}_{r_u}$，则 $\mathbf{w} \in U$，并且：

  $$\mathbf{w} = -(d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_{r_v}\mathbf{v}_{r_v}) \in V$$

  从而 $\mathbf{w} \in U \cap V$，且 $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$，即 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。

$\square$