第八次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 15 日

截止日期　2023 年 4 月 22 日

1. 给定下列矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   - 将其化成行阶梯形。
   - 给出其自由变元的位置。

2. 构造一个矩阵 A，使其满足：

$$N(A) = span(\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\})$$

3. 给出具体的例子来说明下述语句是错误的：

   - A 和 A^T 的零空间相同。
   - A 和 A^T 有相同的自由变元。
   - 如果 R 是 A 的行最简形，那么 R^T 是 A^T 的行最简形。

4. 对下列矩阵，求出其行最简形：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & O \end{bmatrix}$$

   这里 O 是一个 3×3 的全零矩阵。

5. 给出 b_1, b_2, b_3, b_4 所需满足的条件，使得下述方程组有解：

   - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

   hint: 通过消元的方式将增广矩阵化为行阶梯形

6. 请描述下属方程组的解：

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$