第八次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 27 日

截止日期　2023 年 4 月 22 日

1. 给定下列矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- 将其化成行阶梯形。
- 给出其自由变元的位置。

解答.
- 将矩阵 A 化为行阶梯形：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 自由变元的位置：第 $2, 4, 5$ 列。

□

Remark 0.1

请注意，行阶梯形 (Row Echelon Form) 和行最简形 (Row Reduced Echelon Form) 的区别，前者和原本矩阵的首元是相同的，后者会进一步将首元全部变为 1(通过行乘法)，并进一步将首元所在的列的其他元素全部变为 0（通过行加法）。

2. 构造一个矩阵 A，使其满足：

$$N(A) = span(\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\})$$

解答. 注意到：

$$rank(A) = 4 - \dim N(A) = 2$$

所以 A 至少应该是一个 2×4 的矩阵，考察方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将其化成行最简形：

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

其一组特解为：

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这也是 A 的行空间的一组基。从而 A 可以为：

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Remark 0.2

化成行阶梯形也是可以的，关键是要得到其一组作为基的解。而由线性代数基本定理我们可知，这组基包含两个向量。

3. 给出具体的例子来说明下述语句是错误的：

- A 和 A^T 的零空间相同。
- A 和 A^T 有相同的自由变元。
- 如果 R 是 A 的行最简形，那么 R^T 是 A^T 的行最简形。

解答.

- 考察 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 则我们有：

$$N(A) = Z$$
$$N(A^T) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

- 依旧是 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $A\mathbf{x}$ 中没有自由变元，而 $A^T\mathbf{x}$ 中有一个自由变元。
- 依旧是 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，则我们有：

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R^T = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

4. 对下列矩阵，求出其行最简形：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & O \end{bmatrix}$$

这里 O 是一个 3×3 的全零矩阵。

解答. 先将 A 化成行最简形:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&3\\2&4&6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2&4&6\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2&4&6\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2&4&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以对于 B 我们有:

$$\begin{bmatrix}A&A\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1&2&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对于 C 我们有:

$$\begin{bmatrix}A&A\\A&O\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1&2&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1&2&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&-2&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

□

5. 给出 b_1,b_2,b_3,b_4 所需满足的条件，使得下述方程组有解:

- $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\2&5\\3&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&5&7\\3&9&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$

hint: 通过消元的方式将增广矩阵化为行阶梯形

解答.

- 我们对其增广矩阵进行消元:

$$\begin{bmatrix}1&2&b_1\\2&4&b_2\\2&5&b_3\\3&9&b_4\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&b_1\\0&0&b_2-2b_1\\0&1&b_3-2b_1\\0&3&b_4-3b_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&b_1\\0&1&b_3-2b_1\\0&0&b_2-2b_1\\0&3&b_4-3b_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&b_1\\0&1&b_3-2b_1\\0&0&b_2-2b_1\\0&0&b_4-3b_3+3b_1\end{bmatrix}$$

从而 b_1,b_2,b_3,b_4 需要满足的条件为:

$$\begin{cases}b_2-2b_1=0\\b_4-3b_3+3b_1=0\end{cases}$$

- 我们对其增广矩阵进行消元：

$$\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\2&4&6&b_2\\2&5&7&b_3\\3&9&12&b_4\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&1&1&b_3-2b_1\\0&3&3&b_4-3b_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\0&1&1&b_3-2b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&3&3&b_4-3b_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&b_1\\0&1&1&b_3-2b_1\\0&0&0&b_2-2b_1\\0&0&0&b_4-3b_3+3b_1\end{bmatrix}$$

从而 b_1, b_2, b_3, b_4 需要满足的条件为：

$$\begin{cases}b_2-2b_1=0\\b_4-3b_3+3b_1=0\end{cases}$$

□

6. 请描述下属方程组的解：

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\1&3&2&0\\2&0&4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\10\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

解答. 先对 $\begin{bmatrix}A&\mathbf{b}\end{bmatrix}$ 进行消元：

$$\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\1&3&2&0&5\\2&0&4&9&10\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\0&3&0&-3&3\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&0&-4\\0&1&0&0&3\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

可以得到其一组解为：

$$x_1=-4, x_2=3, x_3=0, x_4=2$$

同时 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解相同，从而可以得到 A 的零空间的一组基为：

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

从而 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解可以表示为：

$$\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

□