第八次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 15 日

截止日期　2023 年 4 月 22 日

1. 对于下列矩阵 A，求出其四个空间 (列空间、零空间、行空间、左零空间) 的基:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 判断下列语句的真假，并给出理由:
   - A 和 A^T 的首元个数相同。
   - A 和 A^T 的左零空间相同。
   - 如果 A 的行空间和列空间相同，则 $A = A^T$。
   - 如果 $A = -A^T$，则 A 的行空间和列空间相同。

3. 考察 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 S:
   - 如果 $S = Z = \{\mathbf{0}\}$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
   - 如果 $S = span(\{(1,1,1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
   - 如果 $S = span(\{(1,1,1),(1,1,-1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。

   Remark 0.1

   我们再次强调这里是用了 (a,b,c) 来描述了 $\mathbf{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，并不是用 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$。

4. 证明 A^TA 和 A 的零空间相同，即 $N(A^TA) = N(A)$。

5. 对于下面给定的 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$，求出 $\mathbf{b}$ 到 $\mathbf{a}$ 的投影，并计算其误差和相应的投影矩阵，最后验证其误差和 $\mathbf{a}$ 是垂直的。
   - $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。
   - $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

6. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，$V^\perp$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$，如果存在 $\mathbf{v} \in V$ 和 $\mathbf{v}^\perp \in V^\perp$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp$，则 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}^\perp$ 是唯一的。