第八次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 21 日

1. 对于下列矩阵 A，求出其四个空间 (列空间、零空间、行空间、左零空间) 的基:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\0&1&2&4&6\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

解答. (1) $C(A)$ 的基: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$

(2) $C(A^T)$ 的基: $\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$

(3) $N(A)$ 的基: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

(4) $N(A^T)$ 的基: $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

□

2. 判断下列语句的真假，并给出理由:

- A 和 A^T 的首元个数相同。
- A 和 A^T 的左零空间相同。
- 如果 A 的行空间和列空间相同，则 $A=A^T$。
- 如果 $A=-A^T$，则 A 的行空间和列空间相同。

解答.

- 真，$rank(A^T)=column-rank(A^T)=row-rank(A)=rank(A)$。
- 假，考察 $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 则我们有:

$$N(A)=Z$$
$$N(A^T)=span\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

- 假，考察矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则我们有 $C(A) = C(A^T) = \mathbb{R}^2$，但 $A \neq A^T$.

- 真，由 $A = -A^T$ 可知 $A^T = -A$，则 $C(A) = C(-A) = C(A^T)$。

$\square$

3. 考察 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 S：

- 如果 $S = Z = \{\mathbf{0}\}$，求 S 的正交补 $S^{\perp}$。
- 如果 $S = span(\{(1,1,1)\})$，求 S 的正交补 $S^{\perp}$。
- 如果 $S = span(\{(1,1,1),(1,1,-1)\})$，求 S 的正交补 $S^{\perp}$。

解答.

- $S^{\perp} = \mathbf{R}^3$。
- $S^{\perp} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$。
- $S^{\perp} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$。

$\square$

Remark 0.1

我们再次强调这里是用了 (a,b,c) 来描述了 $\mathbf{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，并不是用 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$。

Remark 0.2

求正交补就是求对应矩阵的零空间。

4. 证明 A^TA 和 A 的零空间相同，即 $N(A^TA) = N(A)$。

解答. 由：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

从而 $N(A) \subseteq N(A^TA)$。下证 $N(A^TA) \subseteq N(A)$。设 $\mathbf{x} \in N(A^TA)$，则有：

$$A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = 0 \Longrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

即：$\mathbf{x} \in N(A)$，也就是 $N(A^TA) \subseteq N(A)$。 $\square$

5. 对于下面给定的 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$，求出 $\mathbf{b}$ 到 $\mathbf{a}$ 的投影，并计算其误差和相应的投影矩阵，最后验证其误差和 $\mathbf{a}$ 是垂直的。

- $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$。
- $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$。

解答.

- 分别计算 $\mathbf{a}^T\mathbf{a}, \mathbf{a}\mathbf{a}^T, \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 可得:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=3,\ \mathbf{a}\mathbf{a}^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{a}^T\mathbf{b}=5$$

从而我们有:

(1) 投影 $\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}$

(2) 投影矩阵 $P=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

(3) 误差 $\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{p}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 其和 $\mathbf{a}$ 的内积为 $\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$, 从而 $\mathbf{e}\perp\mathbf{a}$。

- 分别计算 $\mathbf{a}^T\mathbf{a}, \mathbf{a}\mathbf{a}^T, \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 可得:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=2,\ \mathbf{a}\mathbf{a}^T=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{a}^T\mathbf{b}=2$$

从而我们有:

(1) 投影 $\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

(2) 投影矩阵 $P=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(3) 误差 $\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{p}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$ 其和 $\mathbf{a}$ 的内积为 $\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}=0$, 从而 $\mathbf{e}\perp\mathbf{a}$。

□

6. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, $V^\perp$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$, 如果存在 $\mathbf{v}\in V$ 和 $\mathbf{v}^\perp\in V^\perp$ 使得 $\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{v}^\perp$, 则 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}^\perp$ 是唯一的。

解答. 假设存在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$ 和 $\mathbf{v}_1^\perp,\mathbf{v}_2^\perp\in V^\perp$ 使得 $\mathbf{w}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_1^\perp=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_2^\perp$, 则有

$$\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2^\perp-\mathbf{v}_1^\perp$$

由于 $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\in V$, $\mathbf{v}_2^\perp-\mathbf{v}_1^\perp\in V^\perp$, 则有 $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\in V\cap V^\perp=\{\mathbf{0}\}$, 从而 $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$。同理 $\mathbf{v}_1^\perp=\mathbf{v}_2^\perp$。 □