第九次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 22 日

截止日期 2023 年 4 月 29 日

1. 对于下列矩阵 A，求出其四个空间 (列空间、零空间、行空间、左零空间) 的基:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 考察 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 S:
   - 如果 $S = Z = \{\mathbf{0}\}$，求 S 的正交补 $S^{\perp}$。
   - 如果 $S = span(\{(1,2,1)\})$，求 S 的正交补 $S^{\perp}$。
   - 如果 $S = span(\{(2,1,1),(1,1,-1)\})$，求 S 的正交补 $S^{\perp}$。

Remark 0.1

我们再次强调这里是用了 (a,b,c) 来描述了 $\mathbf{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，并不是用 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$。

3. 对于下面给定的 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$，求出 $\mathbf{b}$ 到 V 的投影，并计算其误差和相应的投影矩阵，最后验证其误差和 $\mathbf{a}$ 是垂直的。
   - $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，$V = span(\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\})$。
   - $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$V = span(\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\})$。

4. 考察如下的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

   - 求投影到列空间 $C(A)$ 上的投影矩阵 P_C 和到行空间 $C(A^T)$ 上的投影矩阵 P_R。
   - 求投影到列空间 $C(B)$ 上的投影矩阵 P_C'，请先思考一下 P_C 和 P_C' 是否相等。
   - 计算 $P_C A P_R$，并解释你的结果。

5. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, $V^{\perp}$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 $\mathbf{v} \in V$ 和 $\mathbf{v}^{\perp} \in V^{\perp}$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^{\perp}$，则 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}^{\perp}$ 是唯一的。

6. 假设 P 是一个投影矩阵，即 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$:

(1) 证明 $P^2 = P$，并且解释为什么 $P(P\mathbf{b})$ 等于 $P\mathbf{b}$。

(2) 证明 P 是对称矩阵，即 $P^T = P$。

(3) 证明，对任一矩阵 C，如果其满足 $C^2 = C$, $C^T = C$，则 C 是一个投影矩阵，即证明对任意的 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 有 $(\mathbf{b} - C\mathbf{b}) \perp C\mathbf{c}$，从而这可以成为投影矩阵的另一个定义。

(4) 证明，给定投影矩阵 P_1, P_2，$P_1P_2 = P_2P_1$ 当且仅当 P_1P_2 是一个投影矩阵。(利用上一问的结论)