第九次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 4 月 29 日

1. 对于下列矩阵 A，求出其四个空间 (列空间、零空间、行空间、左零空间) 的基:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2&3&5\\0&1&2&4&7\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&3&5\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

解答. (1) $C(A)$ 的基: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

(2) $C(A^T)$ 的基: $\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$

(3) $N(A)$ 的基: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

(4) $N(A^T)$ 的基: $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

□

2. 考察 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 S:

- 如果 $S=Z=\{\mathbf{0}\}$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
- 如果 $S=span(\{(1,2,1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
- 如果 $S=span(\{(2,1,1),(1,1,-1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。

Remark 0.1

我们再次强调这里是用了 (a,b,c) 来描述了 $\mathbf{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，并不是用 $\begin{bmatrix}a&b&c\end{bmatrix}$。

解答.

- 注意到对于任意向量 $\mathbf{v}$，$\mathbf{v}\cdot 0=0$，从而 $S^\perp=\mathbf{R}^3$。

- 实际上就是要求 $\mathbf{v}$ 满足：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}=0$$

从而

$$S^{\perp}=span\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

- 实际上就是要求 $\mathbf{v}$ 满足：

$$\begin{matrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}=0\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{v}=0\end{matrix}, \text{即}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

从而

$$S^{\perp}=span\left\{\begin{bmatrix}-2\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

□

3. 对于下面给定的 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$，求出 $\mathbf{b}$ 到 V 的投影，并计算其误差和相应的投影矩阵，最后验证其误差和 $\mathbf{a}$ 是垂直的。

- $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，$V=span(\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\})$。
- $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$，$V=span(\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\})$。

解答.

- V 的维度是 1, 所以可以看作到线 $(1,1,1)$ 上的投影, 令 $\mathbf{a}=(1,1,1)$, 分别计算 $\mathbf{a}^T\mathbf{a},\mathbf{a}\mathbf{a}^T,\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 可得：

$$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=3,\ \mathbf{a}\mathbf{a}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{a}^T\mathbf{b}=5$$

从而我们有：

(1) 投影 $\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}$

(2) 投影矩阵 $P=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

(3) 误差 $\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{p}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 其和 $\mathbf{a}$ 的内积为 $\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$，从而 $\mathbf{e}\perp\mathbf{a}$。

- 令 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$，则我们有 $V=C(A)$。计算 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ 可得：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2\\2&2\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

解方程 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ 可得 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$，从而：

(1) 投影 $\mathbf{p}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$(这是因为 $\mathbf{b}\in V$).

(2) 投影矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(3) 误差 $\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{p}=\mathbf{0}$

□

4. 考察如下的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$$

- 求投影到列空间 $C(A)$ 上的投影矩阵 P_C 和到行空间 $C(A^T)$ 上的投影矩阵 P_R。
- 求投影到列空间 $C(B)$ 上的投影矩阵 P'_C，请先思考一下 P_C 和 P'_C 是否相等。
- 计算 P_CAP_R，并解释你的结果。

解答.

- 注意到 $rank(A)=1$，所以其列空间是由 $(3,4)$ 生成的，令 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，从而其投影矩阵 P_C 为：

$$P_C=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}$$

其行空间是由 $(3,6)$ 生成的，令 $\mathbf{a}'=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$，从而其投影矩阵 P_R 为：

$$P_R=\frac{\mathbf{a}'\mathbf{a}'^T}{\mathbf{a}'^T\mathbf{a}'}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$$

- 注意到 $C(A)=C(B)$，所以 $P'_C=P_C=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}$。
- 计算 P_CAP_R 可得：

$$P_CAP_R=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix}$$

和 A 相同，这是因为：

(1) $P_C A$ 的第 i 列实际上是 A 的第 i 列到 $C(A)$ 上的投影，恰好是其本身，所以 $P_C A = A$。

(2) 我们有

$$AP_R = ((AP_R)^T)^T = (P_R^T A^T)^T = (P_R A^T)^T$$

所以 AP_R 的第 i 行实际上是 A 的第 i 行到 $C(A^T)$ 上的投影，恰好是其本身，所以 $AP_R = A$。(这里我们稍稍用到了第六题中关于投影矩阵的一个性质，其是对称矩阵。)

□

5. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, $V^\perp$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 $\mathbf{v} \in V$ 和 $\mathbf{v}^\perp \in V^\perp$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp$，则 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}^\perp$ 是唯一的。

解答. 假设存在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ 和 $\mathbf{v}_1^\perp, \mathbf{v}_2^\perp \in V^\perp$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^\perp = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^\perp$，则有

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^\perp - \mathbf{v}_1^\perp$$

由于 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_2^\perp - \mathbf{v}_1^\perp \in V^\perp$, 则有 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, 从而 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$。同理 $\mathbf{v}_1^\perp = \mathbf{v}_2^\perp$。 □

6. 假设 P 是一个投影矩阵，即 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$:

(1) 证明 $P^2 = P$，并且解释为什么 $P(P\mathbf{b})$ 等于 $P\mathbf{b}$。

(2) 证明 P 是对称矩阵，即 $P^T = P$。

(3) 证明，对任一矩阵 C，如果其满足 $C^2 = C$, $C^T = C$，则 C 是一个投影矩阵，即证明对任意的 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 有 $(\mathbf{b} - C\mathbf{b}) \perp C\mathbf{c}$，从而这可以成为投影矩阵的另一个定义。

(4) 证明，给定投影矩阵 P_1, P_2，$P_1P_2 = P_2P_1$ 当且仅当 P_1P_2 是一个投影矩阵。(利用上一问的结论)

解答.

(1) 我们有:

$$P^2 = A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P$$

$P(P\mathbf{b}) = P\mathbf{b}$ 是显然的，这是因为 $P(P\mathbf{b})$ 是 $P\mathbf{b}$ 在 $C(A)$ 上的投影，而 $P\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{b}$ 在 $C(A)$ 上的投影，从而 $P\mathbf{b} \in C(A)$，所以 $P(P\mathbf{b}) = P\mathbf{b}$。

(2) 我们有:

$$P^T = (A(A^TA)^{-1}A^T)^T = (A^T)^T((A^TA)^{-1})^TA^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P$$

(3) 对任意的 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 我们有:

$$(\mathbf{b} - C\mathbf{b}) \cdot C\mathbf{c} = (\mathbf{b} - C\mathbf{b})^TC\mathbf{c} = \mathbf{b}^TC\mathbf{c} - \mathbf{b}^TC^TC\mathbf{c} = \mathbf{b}^TC\mathbf{c} - \mathbf{b}^TC^2\mathbf{c} = \mathbf{b}^TC\mathbf{c} - \mathbf{b}^TC\mathbf{c} = 0$$

即 $(\mathbf{b} - C\mathbf{b}) \perp C\mathbf{c}$，从而 C 是一个将任一向量 $\mathbf{b}$ 投影到 $C(C)$ 上的投影矩阵。

(4) 若 $P_1P_2 = P_2P_1$，我们有:

$$(P_1P_2)^T = P_2^TP_1^T = P_2P_1 = P_1P_2$$
$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1P_1P_2P_2 = P_1P_2$$

从而 P_1P_2 是一个投影矩阵。

若 P_1P_2 是一个投影矩阵，则:

$$P_1P_2 = (P_1P_2)^T = P_2^TP_1^T = P_2P_1$$

□