线性代数 For EI　　　　Week 9

第九次作业

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 4 月 22 日

截止日期　2023 年 4 月 29 日

1. 假设现在有 4 个点：$(0,0),(8,1),(8,3),(20,4)$:
   (1) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax+b$，列出对应的方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 并给出每个点上的误差。
   (2) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，列出对应的方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 并且给出每个点上的误差。

2. 通过 $Gram\!-\!Schmidt$ 正交化得到下列向量张成空间的对应标准正交基：

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$$

3. 考虑下列矩阵 Q:

$$Q=c\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

   (1) 求一个合适的 c 使得 Q 是一个正交矩阵。
   (2) 求 $\mathbf{b}=(1,1,1,1)$ 到 Q 中每一个列向量上的投影 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_4$
   (3) 求 $\mathbf{b}=(1,1,1,1)$ 到 Q 的列空间的投影 $\mathbf{p}$。

4. 求出下列矩阵的 QR 分解：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&0&5\\0&3&6\end{bmatrix}$$

   (hint: 先通过 $Gram\!-\!Schmidt$ 正交化得到一组标准正交的向量)

5. 假设 P 是一个投影矩阵，即 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$:
   (1) 证明 $P^2=P$，并且解释为什么 $P(P\mathbf{b})$ 等于 $P\mathbf{b}$。
   (2) 证明 P 是对称矩阵，即 $P^T=P$。
   (3) 证明，对任一矩阵 C，如果其满足 $C^2=C$, $C^T=C$，则 C 是一个投影矩阵，即证明对任意的 $\mathbf{b},\mathbf{c}$ 有 $(\mathbf{b}-C\mathbf{b})\perp C\mathbf{c}$，从而这可以成为投影矩阵的另一个定义。
   (4) 证明，给定投影矩阵 P_1,P_2，$P_1P_2=P_2P_1$ 当且仅当 P_1P_2 是一个投影矩阵。(利用上一问的结论)

6. 证明可逆矩阵 A 的 QR 分解是唯一的，这里 Q 是一个正交矩阵，R 是一个上三角矩阵。