线性代数

Worked Examples for Lecture 1

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 9 日

1. 描述所有由向量 $\mathbf{v}=(1,1,0)$ 和 $\mathbf{w}=(0,1,1)$ 的线性组合在 $\mathbb{R}^3$ 填充的区域。

分析

- 我们介绍了向量，是形如如下的形式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

并且我们也知道，这样一个向量和 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是一一对应的。这赋予了向量的几何意义。

- 我们还介绍了一个重要的概念，线性组合。线性组合牵扯到了两种运算：

(1) 向量之间的加法。

(2) 向量和标量之间的乘法。这里我们的标量指的就是实数，复数当然也是可以的，但不是我们课程讨论的内容。

线性组合指的就是通过这两种运算组合可以得到的结果。

解答. 其线性组合:

$$c\mathbf{v}+d\mathbf{w}=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c+d\\d\end{bmatrix}$$

所以其覆盖了整个 $\mathbb{R}^3$ 中的一个平面，这个平面可以这样被描述：

(1) 其上的点 (x,y,z) 满足 $x+z-y=0$.

(2) 其与向量 $(1,-1,1)$ 垂直，即 $(1,-1,1)$ 是该平面的法向量。

□

2. 请找到一个向量 $\mathbf{x}=(c,d)$ 使得 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}=1$，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{s}=0$，其中 $\mathbf{r}=(2,-1)$，$\mathbf{s}=(1,-2)$.

解答. 事实上，其点积帮我们构建了相应的方程：

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}=1\Rightarrow 2c-d=1$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{s}=0\Rightarrow c-2d=0$$

解得 $c=\frac{2}{3},d=\frac{1}{3}$. □

Remark 0.1

从这里我们看到，对于一个线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其每个方程就是 A 中得行对应得向量与 $\mathbf{x}$ 的点积，而 $\mathbf{b}$ 就是方程右边的常数项。