线性代数

Worked Examples for Lecture 10

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 30 日

1. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$$

分析

计算行列式最简单的一个方式就是通过列初等变换（行初等变换）将其变成一个上三角矩阵（下三角矩阵），而这两种矩阵的行列式就是对角线上元素的乘积。同时初等变换改变行列式的值我们也是清楚的，即：

- 交换两列 (行)，行列式变号。
- 一列 (行) 乘以 k 倍，行列式变为 k 倍。
- 一列 (行) 加上另一列 (行) 的 k 倍，行列式不变。

解答. 注意到：

$$\begin{bmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3-a & 1 & 1 \\ 3-a & 1-a & 1 \\ 3-a & 1 & 1-a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

上述的第一步是将第二列和第三列的一倍加到第一列上，从而其行列式值为：

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (3-a)\cdot 1\cdot(-a)\cdot(-a) = a^2(3-a)$$

□

2. 令 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，分别求 $A^2, A^{-1}, A-\lambda I$ 的行列式的值。

分析

这道题我们实际上是想通过 2×2 的行列式运算来展示行列式其实对乘法更为友好（很快就会证明），即：

(1) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$, $\det(A^n) = (\det(A))^n$.

(2) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

我们后续也会看到，$A-\lambda I$ 会扮演非常重要的角色。

解答. 分别计算相应矩阵可得:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},\ A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\det(A) = 10,\ \det(A^2) = 100,\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{10},\ \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 10 - 7\lambda + \lambda^2$$

□

3. 设 A 具有如下的 QR 分解:

$$A = Q\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

其中 Q 是一个正交矩阵，求 $\det(A)$ 的所有可能值。

分析

注意到 $Q^TQ = I$，所以我们有:

$$\det(Q) = \pm 1$$

- 这里运用了两个稍后会证明的结论，即转置矩阵的行列式相等和矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积。
- 这也说明了可逆矩阵 QR 分解的一个好处。

解答. 由于 $\det(A) = \det(Q)\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，所以 $\det(A) = \pm 24$. □