线性代数

Worked Examples for Lecture 11

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 30 日

1. 一个 Hessenberg 矩阵 H_n 是一个下三角矩阵多了一条对角线的矩阵，如下所示。

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

利用行列式展开说明 $|H_{n-1}| = |H_{n-1}| + |H_{n-2}|$，特别的 $|H_4| = |H_3| + |H_2|$.

分析

这里我们利用的是行列式的另一个常用的计算方法，按某一行或者某一列展开。这种方法在计算一些有规律的行列式的时候非常有用，往往可以得到相应的递推关系。

解答. 首先我们对 H_4 进行行列式的展开，将其第一行展开有：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

注意到：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

从而:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

所以：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

对于 H_n：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

为了展示的更清楚，下面我们会在行列式的右下角表示清楚行列式的大小。我们按第一行展开有：

$$\det(H_n) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

继续将上述两个行列式按第一行展开，我们有：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-2} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-2} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-2} = \det(H_{n-2})$$

因此：

$$\det(H_n) = \det(H_{n-1}) + \det(H_{n-2})$$

□

2. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

分析

- 我们用初等变换的方式来计算和行展开的方式综合来计算该行列式。
- 最终我们可以看到，这个行列式的值实际上是可以看成关于 x 的一个 $n-1$ 次多项式。

解答. 首先我们有：

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & a_1 - x & \cdots & a_1^{n-1} - x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} - x & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - x^{n-1} \end{bmatrix}$$

从而根据行列式的行展开我们只需要计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & \cdots & a_1^{n-1} - x^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} - x & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - x^{n-1} \end{vmatrix}$$

注意到 $a_i^k - x^k = (a_i - x)(a_i^{k-1} + a_i^{k-2}x + \cdots + x^{k-1})$，所以我们有：

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & \cdots & a_1^{n-1} - x^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} - x & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - x^{n-1} \end{vmatrix} = (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x) \begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=0}^{1} a_1^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_1^i x^{2-i} \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_1^i x^{n-1-i} \\ 1 & \sum_{i=0}^{1} a_2^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_2^i x^{2-i} \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_2^i x^{n-1-i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sum_{i=0}^{1} a_{n-1}^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_{n-1}^i x^{2-i} \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1}^i x^{n-1-i} \end{vmatrix}$$

并且我们有：

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_j^i x^{k+1-i} = x \sum_{i=0}^{k} a_j^i x^{k-i} + a_j^{k+1}$$

这意味着我们如果依次将第 $n-2, n-3, \cdots, 2$ 的 $-\mathbf{x}$ 倍加到第 $n-1, n-2, \cdots, 2$ 列上去，我们最终会得到：

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=0}^{1} a_1^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_1^i x^{2-i} \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_1^i x^{n-1-i} \\ 1 & \sum_{i=0}^{1} a_2^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_2^i x^{2-i} \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_2^i x^{n-1-i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sum_{i=0}^{1} a_{n-1}^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_{n-1}^i x^{2-i} \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1}^i x^{n-1-i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=0}^{1} a_1^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_1^i x^{2-i} \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & \sum_{i=0}^{1} a_2^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_2^i x^{2-i} \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sum_{i=0}^{1} a_{n-1}^i x^{1-i} & \sum_{i=0}^{2} a_{n-1}^i x^{2-i} \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

从而令 $D_n(x)$ 为下列行列式的值：

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

我们有：

$$D_n(x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)D_{n-1}(a_1)$$

从而我们有：

$$D_n(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)$$

即：

$$\begin{vmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-1}\\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=D_{n-1}(a_1)=\prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-x)$$

□

3. 解释下列语句：

- 我们对 A 作如下改变，对所有 $i,j\in[n]$，将其第 i 行第 j 列的元素乘以 $\frac{i}{j}$，得到后的新矩阵为 B，则 $\det(B)=\det(A)$.

分析

这是对于 Big formula 的一个简单运用。注意到对于 A，我们有：

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

因为元素并没有改变位置，从而我们只需要考虑上述每一项乘积是否发生了改变。

解答. 注意到对于 B 和任一个置换 σ，我们有：

$$\begin{aligned}b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}&=(\frac{\sigma(1)}{1}a_{\sigma(1)1})(\frac{\sigma(2)}{2}a_{\sigma(2)2})\cdots(\frac{\sigma(n)}{n}a_{\sigma(n)n})\\&=\frac{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)}{1\cdot 2\cdots n}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\\&=a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

从而我们有：

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(n)n}=\det(B)$$

□

4. 我们利用行列式来帮忙解决一下方程：

- $$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 2\\ 1 & 4 & 2\\ 5 & 9 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

- $$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 3 & 9\\ 2 & 2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

分析

这道题我们来展示一下 $Cramer$ 法则和行列式展开在解方程的具体利用。

- $Cramer$ 法则关键是利用 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$，即：

$$A\begin{bmatrix}1 & \cdots & x_1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{e}_1 \cdots A\mathbf{x} \cdots A\mathbf{e}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b} \cdots \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$$

  这里 $\mathbf{a}_i$ 是 A 的第 i 个列向量，从而可以计算出 $\mathbf{x}$.

- 行列式的展开其实帮助我们迅速找到了当 $rank(A) = n-1$ 时 $n \times n$ 方阵时 $A\mathbf{x} = 0$ 的解，注意对于一个 $n \times n$ 的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

  求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 实际上就是找到 $(x_1, \cdots, x_n)$ 使得：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

  而注意当 $\det(A) = 0$ 时我们有:

$$0 = \det(A) = a_11C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n} = \cdots = a_{n1}C_{n1} + \cdots + a_{nn}C_{nn}$$

  这意味着第一行的代数余子式实际上是第一个方程 $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$ 的解，而进一步我们可以证明它是上述任何一个方程的解，这是因为:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \begin{vmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = 0$$

  也就是说任何一行的代数余子式都是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解，从而我们可以快速找到这个解。这个方法只对 $rank(A) = n-1$ 的情况有效，因为当 $rank(A) \leq n-2$ 的时候，任何一个代数余子式的值也都是 0.

解答.

- 计算 A_1, A_2, A_3, A 的行列式可得：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ \det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

  所以方程组的解为：

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 2,\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -1,\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1$$

- 首先注意到 $rank(A) = 2$，这意味着 $dim(N(A)) = 1$。因此我们只需要找到其一个解即可，计算第一行的代数余子式可得：

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 6,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -2,\ C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

  从而根据前面的分析，$(6, -2, -2)$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个解，也是 $N(A)$ 的一组基。

$\square$