线性代数

Worked Examples for Lecture 12

LECTURER: 杨启哲　　LAST MODIFIED: 2024 年 6 月 11 日

1. 给定下列矩阵 A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

分别计算 $A, A^2, A^{-1}, A+4I$ 的特征值以及对应的特征向量。

分析

- 计算特征值和特征向量最基本的方法是求解特征方程 $|A-\lambda I|=0$，然后求解特征向量方程 $(A-\lambda I)x=0$。
- 我们也注意到当 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ 时有：

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x},\ A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x},\ (A+4I)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+4\mathbf{x} = (\lambda+4)\mathbf{x}$$

- 最后的另一个解释是：

$$\begin{aligned} &\det(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n) \\ \Longrightarrow\ &\det(A+kI-\lambda I) = \det(A-(\lambda-k)I) = (\lambda-k-\lambda_1)\cdots(\lambda-k-\lambda_n) \end{aligned}$$

解答.

- 解方程 $\det(A-\lambda I)=0$ 得：

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

  其中 $\lambda_1=1, \lambda_2=3$
  - 当 $\lambda=1$ 时，解方程 $(A-I)x=0$ 得：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

    得到 $x_1=x_2$，因此特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - 当 $\lambda=3$ 时，解方程 $(A-3I)x=0$ 得：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

    得到 $x_1=-x_2$，因此特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- 由前面的讨论可知：

(1) A^2 对应的特征值为 $\lambda_1^2 = 1, \lambda_2^2 = 9$，对应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

(2) A^{-1} 对应的特征值为 $\lambda_1^{-1} = 1, \lambda_2^{-1} = \frac{1}{3}$，对应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

(3) $A + 4I$ 对应的特征值为 $\lambda_1 + 4 = 5, \lambda_2 + 4 = 7$，对应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

□

2. 计算下列对称矩阵 S 的特征值以及对应的特征向量，并验证其不同特征值对应的特征向量是否正交。

$$S = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

分析

- 这里其实就是向大家展示，对称矩阵不同特征值的特征向量是正交的。
- 我们还需要注意的是，在求特征向量时一个特征值可能对应若干个线性无关的特征向量，这取决于 $\mathbf{N}(A - \lambda I)$ 的维数，当然我们也可以利用 Gram-Schmidts 正交化将其转换成两两正交的特征向量。
- 后面的课我们会看到，任何的 n 阶实对称矩阵，我们都可以求得 n 个两两正交的特征向量。

解答. 计算其特征多项式的零点：

$$\det(S - \lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\-1 & 2-\lambda & -1\\0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

其中 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

- 当 $\lambda = 0$ 时，解方程 $Sx = 0$ 得：

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得到 $x_1 = x_3, x_2 = 0$，因此特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

- 当 $\lambda = 1$ 时，解方程 $(S - I)x = 0$ 得：

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\-1 & 1 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得到 $x_1 = x_3, x_2 = 0$，因此特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

- 当 $\lambda = 3$ 时，解方程 $(S-3I)x=0$ 得：

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得到 $x_1 = -x_3, x_2 = 0$，因此特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

不难验证，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 两两之间的内积均为 0，从而其是两两正交的。 □

3. 给定下列矩阵 A，求其对角化的形式，并 A^n 的值。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

分析

- 核心是要理解 $AX = X\Lambda$，这相当于把很多个 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 合并起来写，即 X 的每一个列向量都是 A 的特征向量。
- 当能找到 n 个线性无关的特征向量的时候，X 就可以是一个可逆矩阵，从而我们就有 $A = X\Lambda X^{-1}$，即一个 n 阶矩阵可以对角化的充要条件是存在 n 个线性无关的特征向量。
- 我们会在下一个 sample 里继续看到对称矩阵的对角化有更好的形式，即 $A = Q\Lambda Q^T$。

解答. 计算其特征值：

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

从而其特征值为:$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -2$

- 当 $\lambda = 1$ 时，解方程：$(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得到其解空间得一组基为：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 当 $\lambda = -2$ 时，解方程：$(A+2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  得到其解空间得一组基为：

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而我们可以构造：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

满足：$AX = X\Lambda$，并且由：

$$X^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

我们有：

$$A = X\Lambda X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

从而：

$$A^n = \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-2)^n & -1+(-2)^n & 1-(-2)^n \\ -1+(-2)^n & 2+(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 2+(-2)^n \end{bmatrix}$$

$\square$