线性代数

Worked Examples for Lecture 13

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 6 月 11 日

1. 将下列对称矩阵对角化，即寻求一个正定矩阵 Q 和对角矩阵使得 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

分析

- 我们已经在上个 sample 中给出了其的一种对角化：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 注意到 $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$，所以 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ 实际上就是 $SQ = Q\Lambda$，也就是说对于对称矩阵，我们不仅可以找到 n 个线性无关的特征向量，我们还可以找到 n 个两两正交的特征向量。
- 我们已经证明了对称矩阵不同特征值的特征向量是两两正交的，而对于同一个特征值下的特征向量，则可以通过 Gram-Schmidts 正交化来获取正交的特征向量。
- 可以再次看到，对角化实际上并不唯一。

解答. 由之前的结论：S 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -2$：

- $\lambda = 1$ 时一组特征向量为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

利用 Gram-Schmidts 正交化可以得到相应的一组标准正交的向量：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

- $\lambda = -2$ 时一组特征向量为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将其单位化可得：

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

令:

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

则:

$$Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

从而:

$$S=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

□

2. 将下列二次型 f 转化成标准型:

$$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

分析

- 首先我们需要注意到，一个 n 个未知数的二次型和一个 $n\times n$ 的对称矩阵是一一对应的。
- 注意到标准型对应的矩阵是一个对角矩阵，所以转换成标准型实际上就是将对称矩阵对角化成 $Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ 的形式。
- 另一个方法是通过配方法，其核心思想是每次平方的构建都用完某个未知数出现的所有地方，这样最多只有构建 n 个平方项；如果不存在平方项，则先通过换元构造出平方项。
- 也需要注意到两种方式并不完全相同，利用对称矩阵对角化的方式实际上做的是正交变换，其能保持很好的几何性质，而配方法出来的变换一般是做不到的。

解答. 我们提供两种方法:

- **对称矩阵的对角化** 其对应的对称矩阵为:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

由上题可知，其对角化为:

$$S=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

从而定义:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=Q^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

我们有：

$$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$$

- **配方法** 注意到式子里并没有平方项，我们先作如下代换：

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \text{即}\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

则：

$$\begin{aligned}f&=-2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3+2(y_1-y_2)y_3\\&=-2y_1^2+2y_2^2+4y_1y_3-2y_2y_3\\&=(-2y_1^2+4y_1y_3)+2y_2^2-2y_2y_3\\&=-2(y_1-y_3)^2+2y_2^2-2y_2y_3+2y_3^2\\&=-2(y_1-y_3)^2+2(y_2-\frac{1}{2}y_3)^2+\frac{3}{4}y_3^2\end{aligned}$$

从而令 $z_1=y_1-y_3$，$z_2=y_2-\frac{1}{2}y_3$，$z_3=y_3$，即：

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

我们有：

$$f=-2z_1^2+2z_2^2+\frac{3}{4}z_3^2$$

□

3. 判断下列矩阵是否是正定矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{bmatrix}$$

分析

判断对称矩阵是否是正定的有如下几个方式：

(1) 判断所有的特征值是否都大于 0

(2) 顺序主子式是否都大于 0

(3) 判断其二次型是否满足对于所有非零向量 x，都有 $x^{\mathrm{T}}Ax>0$，这一方式主要的思想是通过配方来进行判断。

(4) 如果其存在 $A^{\mathrm{T}}A$ 的分解形式，其中 A 是列满秩的，则其也是正定的。

而对于负定的判断方式主要有：

(1) 判断所有的特征值是否都小于 0

(2) 顺序主子式是否交替大于 0 和小于 0，即第一个小于 0，第二个大于 0，第三个小于 0，以此类推。

(3) 判断其二次型是否满足对于所有非零向量 x，都有 $x^{\mathrm{T}}Ax < 0$，这一方式主要的思想是通过配方来进行判断。

解答. 我们也用不同的方式来进行判断：

(1) 计算其特征值：

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda+8) = 0$$

(2) 计算其顺序主子式：

$$\begin{vmatrix} -5 \end{vmatrix} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

(3) 直接考虑其二次型：

$$f = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = -(x_1-2x_3)^2 - (2x_1-x_2)^2 - 5x_2^2$$

从而其不是正定的，进一步我们可以判断其是负定的。

□