线性代数

Worked Examples for Lecture 2

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 9 日

1. 描述下列方程组的列图像，并根据此来给出方程组的解。

$$\begin{cases} x+3y+2z=-3 \\ 2x+6y+z=-6 \\ 5x+9y+8z=-9 \end{cases}, \quad 即 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

分析

我们可以从两个角度来理解一个方程组：

- 从行的角度来说，其实际上是问若干个平面（超平面）的交点。
- 从列的角度来说，其实际上是问列向量的线性组合能否得到右侧的向量。

解答. 该方程实际上问的是是否存在一个如下的线性组合：

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

很自然的我们可以得到：$x=0, y=1, z=0$。这是该方程的一组解。 □

2. 给出一个 3×3 的矩阵 E_{21} 使 $E_{21}A$ 是将矩阵 A 的第一行的两倍加到第二行的结果，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix} \quad 则 \quad E_{21}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22} & \cdots & 2a_{1m}+a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

分析

对于矩阵的运算，我们有如下的理解方式：

- $A\mathbf{x}$ 是列的线性组合，即：

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

- $\mathbf{x}A$ 是 A 的行的线性组合，即：

$$\mathbf{x}A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m$$

这也是矩阵乘法的雏形。

解答. 根据要求，$E_{21}A$ 满足：

- 第一行是 A 的第一行。
- 第二行是 A 的第一行的两倍加到第二行。
- 第三行是 A 的第三行。

即：

$$\begin{aligned}
\text{row 1 of } E_{21}A &= 1 \cdot \text{row 1 of } A + 0 \cdot \text{row 2 of } A + 0 \cdot \text{row 3 of } A \\
\text{row 2 of } E_{21}A &= 2 \cdot \text{row 1 of } A + 1 \cdot \text{row 2 of } A + 0 \cdot \text{row 3 of } A \\
\text{row 3 of } E_{21}A &= 0 \cdot \text{row 1 of } A + 0 \cdot \text{row 2 of } A + 1 \cdot \text{row 3 of } A
\end{aligned}$$

从而：

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Remark 0.1

这样的矩阵被称为消元矩阵，一般形式为：

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

这里 $-k$ 的位置在第 i 行第 j 列，其效果是将第 j 行的 $-k$ 倍加到第 i 行。

3. 给出一个 3×3 的矩阵 P_{21} 使 $P_{21}A$ 是将矩阵 A 的第二行和第一行交换的结果，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix} \quad \text{则} \quad E_{21}A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1m} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

解答. 与上题相同，我们可以得到 $P_{21}A$ 满足：:

- 第一行是 A 的第二行。
- 第二行是 A 的第一行。
- 第三行是 A 的第三行。

即：

$$\begin{aligned}
\text{row 1 of } P_{21}A &= 0 \cdot \text{row 1 of } A + 1 \cdot \text{row 2 of } A + 0 \cdot \text{row 3 of } A \\
\text{row 2 of } P_{21}A &= 1 \cdot \text{row 1 of } A + 0 \cdot \text{row 2 of } A + 0 \cdot \text{row 3 of } A \\
\text{row 3 of } P_{21}A &= 0 \cdot \text{row 1 of } A + 0 \cdot \text{row 2 of } A + 1 \cdot \text{row 3 of } A
\end{aligned}$$

从而：

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Remark 0.2

这样的矩阵被称为初等置换矩阵，因为其一次只讲一个行与另一个行交换，一般形式为：

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

这里 1 的位置在第 i 行第 j 列，其效果是将第 i 行与第 j 行交换。