线性代数

Worked Examples for Lecture 3

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 9 日

1. 计算下列矩阵的乘法：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

分析

我们介绍了矩阵乘法的若干种理解：

(1) $AB(i,j) = (a_{i1},\dots,a_{in})\cdot(b_{1j},\dots,b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

(2) $AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$

(3) $AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}$

(4) $AB = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$

当然我们也介绍了分块的思想，根据分块的思想我们可以对矩阵进行任意的划分再进行乘法。但最关键的是，我们要保证任何时候出现两个矩阵 AB 乘法乘起来的时候是合法的，即 A 的列数等于 B 的行数。

解答. 我们展现几种不同的及算方法：

(1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot1+1\cdot3+2\cdot5 & 0\cdot2+1\cdot4+2\cdot6 \\ 3\cdot1+4\cdot3+5\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot4+5\cdot6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 40 & 52 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

注意到：

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 52 \end{bmatrix}$

从而：

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&16\\40&52\end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$$

注意到：

- $\mathbf{a}_1\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&16\end{bmatrix}$
- $\mathbf{a}_2\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40&52\end{bmatrix}$

从而：

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&16\\40&52\end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&16\\40&52\end{bmatrix}$$

(5)

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&16\\40&52\end{bmatrix}$$

$\square$

2. 给定 n 维向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}$，当 $1+\mathbf{u}^T\mathbf{v}\neq 0$ 时，验证下列等式成立：

$$(I-\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}})(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)=(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(I-\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}})=I$$

即 $I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 是可逆的，并且 $(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}=I-\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}$

分析

- 首先我们强调，说 n 维向量的时候指的是列向量，即是一个 $n\times 1$ 的矩阵。从而我们可以看到 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 是一个 $n\times n$ 的矩阵，而 $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ 则是一个值，其等于这连个列向量的内积。
- 我们必须再次强调，矩阵的乘法只有结合律，没有交换律，所以我们不能随意的改变位置。
- 目前回顾可逆矩阵的定义，我们要求同时存在矩阵 B,C 使得 $AB=CA=I$，等到后面进一步的学习中我们可以发现只需要有 $AB=I$ 或者 $CA=I$ 即可，当然这里我们假定了 A,B,C 都已经是方阵了。

解答.

- 首先我们计算 $(I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}})(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$:

$$\begin{aligned}
(I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}})(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= I\cdot I + I\cdot \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\cdot I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\cdot \mathbf{u}\mathbf{v}^T \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{v}^T \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{u}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{v}^T \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{v}^T = I
\end{aligned}$$

- 再计算 $(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}})$:

$$\begin{aligned}
(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}) &= I\cdot I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\cdot I - I\cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T\cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{v}^T \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{u}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{v}^T \\
&= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{v}^T = I
\end{aligned}$$

□

Remark 0.1

这实际上就是 Sherman-Morrsion-Woodbury 公式, 我们给出一个简化版本。令 A 是可逆的, 则 $A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 可逆当且仅当 $1+\mathbf{v}^TA^{-1}\mathbf{u}\neq 0$, 并且其逆矩阵为:

$$(A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^TA^{-1}}{1+\mathbf{v}^TA^{-1}\mathbf{u}}$$

这个公式的意义在于当我们对矩阵进行小幅修改的时候, 新的矩阵的逆不需要重新进行计算, 这可以大大提高计算的速度。