线性代数

Worked Examples for Lecture 4

LECTURER: 杨启哲　　LAST MODIFIED: 2024 年 3 月 29 日

1. 考察集合 $\mathbb{R}^2$，如果我们把加法定义成 $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_2,x_2+y_1)$，数乘的定义不变，则请验证这个集合与这两种运算不构成一个向量空间，并且指出其不满足哪条性质。

分析

要理解清楚一个向量空间 V，必须明白其是一个集合 V 和两种运算 $'+'$, $'\cdot'$，第一种我们称为' 加法'，是定义在 V 上两个元素的运算，第二种则称为' 数乘'，是定义在实数集 $\mathbb{R}$（这节课只讨论 $\mathbb{R}$）和 V 上的运算，并且满足如下的十条性质：

(1) (加法封闭) $\mathbf{u}\in V,\mathbf{v}\in V$ 蕴含 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V$。

(2) (数乘封闭) $\mathbf{u}\in V, c\in\mathbb{R}$ 蕴含 $c\cdot\mathbf{u}\in V$。

(3) (加法交换) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(4) (加法结合) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(5) (加法零元) 存在一个元素 $\mathbf{0}\in V$，使得 $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$，这里的 $\mathbf{0}$ 不一定是实数 0 或者零向量，是在这个运算下满足该性质的集合 V 中的元素。

(6) (加法逆元) 对于每一个 $\mathbf{u}\in V$，存在一个元素 $\mathbf{v}\in V$，使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$，并且我们记作 $\mathbf{v}=-\mathbf{u}$

(7) (数乘单位元) $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$，这里的 1 就是实数 1

(8) (数乘结合) $(c_1c_2)\cdot\mathbf{u}=c_1\cdot(c_2\cdot\mathbf{u})$

(9) (数乘分配) $(c_1+c_2)\cdot\mathbf{u}=c_1\cdot\mathbf{u}+c_2\cdot\mathbf{u}$

(10) (加法分配) $c\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\cdot\mathbf{u}+c\cdot\mathbf{v}$

解答. 我们逐一验证这十条性质：

(1) 设 $\mathbf{u}=(x_1,y_1),\mathbf{v}=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，则 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x_1+y_2,x_2+y_1)\in\mathbb{R}^2$，即加法是封闭的。

(2) 设 $\mathbf{u}=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2, c\in\mathbb{R}$，则 $c\cdot\mathbf{u}=(cx_1,cy_1)\in\mathbb{R}^2$，即数乘是封闭的。

(3) 设 $\mathbf{u}=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，则 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x_1+y_2,x_2+y_1)$，$\mathbf{v}+\mathbf{u}=(x_2+y_1,x_1+y_2)$，即加法不满足交换律。

(4) 设 $\mathbf{u}=(x_1,y_1),\mathbf{v}=(x_2,y_2),\mathbf{w}=(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$，则

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=(x_1+y_2,y_2+x_1)+(x_3,y_3)=(x_1+y_2+y_3,y_1+x_2+x_3)$$
$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(x_1,y_1)+(x_2+y_3,x_3+y_2)=(x_1+y_2+x_3,y_1+x_2+y_3)$$

即加法不满足结合律。

(5) 令 $\mathbf{v}=(0,0)$，则对于任意 $\mathbf{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x+0,0+y)=(x,y)=\mathbf{u}$，即存在零元素 $\mathbf{0}=(0,0)$。

(6) 设 $\mathbf{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$，令 $\mathbf{v}=(-y,-x)$，则 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x-x,y-y)=(0,0)=\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{u}$ 的逆元素是 v，即加法逆元存在。

(7) 对于任意 $\mathbf{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有 $1\cdot\mathbf{u}=(1\cdot x,1\cdot y)=(x,y)=\mathbf{u}$，即数乘单位元存在。

(8) 设 $\mathbf{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2, c_1,c_2\in\mathbb{R}$，则 $(c_1c_2)\cdot\mathbf{u}=(c_1c_2x,c_1c_2y)=c_1\cdot(c_2\cdot\mathbf{u})$，即数乘结合律成立。

(9) 设 $\mathbf{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2, c_1,c_2\in\mathbb{R}$，则

$$
\begin{aligned}
(c_1+c_2)\cdot\mathbf{u}&=((c_1+c_2)x,(c_1+c_2)y)=(c_1x+c_2x,c_1y+c_2y)\\
c_1\cdot\mathbf{u}+c_2\cdot\mathbf{u}&=(c_1x,c_1y)+(c_2x,c_2y)=(c_1x+c_2y,c_1y+c_2x)
\end{aligned}
$$

即数乘不满足分配律。

(10) 设 $\mathbf{u}=(x_1,y_1),\mathbf{v}=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2, c\in\mathbb{R}$，则

$$
\begin{aligned}
c\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})&=c\cdot(x_1+y_2,x_2+y_1)=(c(x_1+y_2),c(x_2+y_1))\\
c\cdot\mathbf{u}+c\cdot\mathbf{v}&=(cx_1,cy_1)+(cx_2,cy_2)=(cx_1+cy_2,cy_1+cx_2)
\end{aligned}
$$

即数乘满足加法分配律。

□

2. 请描述下列向量空间的一个子空间 S，再描述一个子空间 S 的子空间 SS：

- $V_1=$ 所有 $(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)$ 的线性组合组成的集合。
- $V_2=$ 所有与 $\mathbf{u}=(1,2,1)$ 垂直的向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$，即 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$。
- $V_3=$ 所有 2×2 的对称矩阵 (Symmetric Matrix) 组成的集合。

分析

一个向量空间 V 的子空间 S 是 V 的一个特殊非空子集，其满足：

(1) 加法封闭。

(2) 数乘封闭。

并且我们可以验证，S 是一个向量空间 (运算就是原来 V 上的)。一个特别的例子就是 V 本身也是 V 的子空间。换个角度来理解，就是如果 S 是一个子空间，那么给定 S 中的任何一些元素，他们的线性组合也都在 S 中。

解答.

(1) V_1 的一个子空间 S 是所有 $(1,1,0,0),(1,1,1,0)$ 的线性组合组成的集合，即 $S=\{a(1,1,0,0)+b(1,1,1,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$。$S$ 的一个子空间 SS 是所有 $(1,1,0,0)$ 的线性组合组成的集合，即 $SS=\{a(1,1,0,0)|a\in\mathbb{R}\}$。

(2) V_2 的一个子空间 S 是所有与 $\mathbf{u}=(1,2,1)$ 垂直的向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ 并且满足 $\mathbf{v}(1)=0$，即 $S=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\wedge\mathbf{v}(1)=0\}$。$S$ 的一个子空间 SS 是只包含 $(0,0,0)$ 的集合，即 $SS=\{(0,0,0)\}$.

(3) V_3 的一个子空间 S 是所有 2×2 的对称矩阵组成的集合，即 $S=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}|a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$。$S$ 的一个子空间 SS 是所有 2×2 的对称矩阵中 $a=0$ 的集合，即 $SS=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\b&c\end{pmatrix}|b,c\in\mathbb{R}\right\}$。

□

3. 解释一下下列矩阵 A 的列空间、行空间和零空间：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分析

对于一个 $m \times n$ 的矩阵 A，我们可以定义其列空间、行空间和零空间：

(1) 列空间：A 的列空间是所有 A 的列向量的线性组合组成的集合，也就是所有的 $A\mathbf{x}$，其每个元素都是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个元素，所以它是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

(2) 行空间：A 的行空间是所有 A^T 的列向量的线性组合组成的集合，也就是所有的 A 中行向量的转置的列向量组成的线性组合组成的集合，其每个元素都是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素，所以它是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

(3) 零空间：A 的零空间是所有 $\mathbf{x}$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的集合，其每个元素都是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个元素，所以它是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

解答.

- 其列向量是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$，所以其列空间就是由上述四个列向量的线性组合组成的集合，即

$$C(A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

- 其转置矩阵的列向量是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，所以其行空间就是由上述三个列向量的线性组合组成的集合，即

$$C(A^T) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

- 零空间就是所有 $\mathbf{x}$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，可以验证其都具备 $\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的形式，所以，其零空间就是由上述向量的线性组合组成的集合，即

$$N(A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

□