线性代数

Worked Examples for Lecture 5

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 1 日

1. 我们从向量 $(1,2,0)$ 和 $(2,3,0)$ 开始。
   - 这两个向量是线性无关 (linearly independent) 的么?
   - 这两个向量会是某个空间的一组基 (basis) 么?
   - 这两个向量生成的空间是什么? 其维数 (Dimension) 是多少?

分析

(1) 线性无关的定义是:

$$c_1(1,2,0)+c_2(2,3,0)=(0,0,0)\text{当且仅当}c_1=c_2=0$$

所以只要计算上列等式验证是否有 $c_1=c_2=0$ 即可。

(2) Steinitz Exchange Lemma 告诉我们，如果一组向量是线性无关的，那么它们就可能是某个空间的一组基，一个很简单的例子就是由他们生成的空间。

(3) 我们说过一个向量空间要满足十条性质，四条关于加法的运算性质，四条关于数乘的运算性质，剩下两条是要求对于运算封闭的性质。而给定 k 个向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$，使其可以封闭的最小集合就是其所有的线性组合，用符号表达就是:

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}=c_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_k\mathbf{v}_k$$

这里 $c_1,\ldots,c_k$ 是任意实数，而对于本题来说就是:

$$\operatorname{span}\{(1,2,0),(2,3,0)\}=\{c_1(1,2,0)+c_2(2,3,0)|c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$$

进一步我们也说明了，这个集合就是一个向量空间，我们也称其是这 k 个向量生成的空间。

(4) 维数的定义是这个空间的一组基里的向量个数。这个定义是合理的，因为 Steinitz Exchange Lemma 告诉我们一个空间的任何一组基的个数都是相同的。而空间 V 的一组基要满足两个条件:

- 这些向量线性无关。
- 这些向量生成了空间 V。

所以对于这个例子，维数就是 2.

解答.

(1) 注意到

$$c_1(1,2,0)+c_2(2,3,0)=(0,0,0)\text{当且仅当}c_1=c_2=0$$

所以其是线性无关的。

(2) 其是某个空间的一组基，比如其生成的空间 $V = \text{span}\{(1,2,0),(2,3,0)\}$.

(3) $dim(V) = 2$.

□

2. 假设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是线性无关的向量组：

- 证明 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ 是线性相关的。
- 证明 $\mathbf{W}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{W}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{W}_3 = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$ 是线性相关的。

解答.

(1) 注意到：

$$1\mathbf{w}_1 + 1\mathbf{w}_2 + 1\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

所以 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 是线性相关的。

(2) 反设结论不成立，即存在不全为 0 的实数 c_1, c_2, c_3 使得：

$$c_1\mathbf{W}_1 + c_2\mathbf{W}_2 + c_3\mathbf{W}_3 = \mathbf{0}$$

则我们有：

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{W}_1 + c_2\mathbf{W}_2 + c_3\mathbf{W}_3 &= c_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + c_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c_3(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1) \\ &= (c_1 + c_3)\mathbf{v}_1 + (c_1 + c_2)\mathbf{v}_2 + (c_2 + c_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

这意味着存在不全为 0 的数 $C_1 = c_1+c_3, C_2 = c_1+c_2, C_3 = c_2+c_3$ 使得 $C_1\mathbf{v}_1+C_2\mathbf{v}_2+C_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ 成立，这与 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是线性无关的矛盾。

□

3. 假设 $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，A 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵，证明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

分析

这是一个很重要的结论，其实际上说明了一个可逆矩阵的效果实际上可以理解成一个基的变换。我们举个很简单的例子来说明一下，后面我们会继续讨论。比如考察在 $\mathbb{R}^2$ 中，我们有一组基 $\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1)$，对于 $\mathbf{u} = (2,3)$ 来说，有：

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$$

所以我们也可以说 $(2,3)$ 是 $\mathbf{u}$ 在这组基下的坐标。现在我们考察可逆矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $A\mathbf{v}_1 = (2,1), A\mathbf{v}_2 = (1,2)$ 依旧是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基，而且我们有：

$$A\mathbf{u} = 2A\mathbf{v}_1 + 3A\mathbf{v}_2$$

换句话说 $A\mathbf{u}$ 在 $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2$ 这组基下的坐标还是 $(2,3)$。
但这个的证明其实并不困难，只需要线性无关的定义即可。

解答. 我们先证明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 是线性无关的，假设存在 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

由矩阵的运算法则可知:

$$A(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

将 $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ 记为 $\mathbf{v}$。注意到 A 是可逆的，所以 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$，从而由于 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是线性无关的，所以 $c_1 = \ldots = c_n = 0$，所以 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 是线性无关的。
其次我们证明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 生成 $\mathbb{R}^n$，即对于任意 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，存在 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$\mathbf{u} = c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n A\mathbf{v}_n$$

这只要注意到 A 是可逆的，从而:

$$A^{-1}\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，所以对于任意 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，都会存在相应的 $c_1, \ldots, c_n$。 □