线性代数

Worked Examples for Lecture 6

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 1 日

1. 给定矩阵 A, B，证明：

$$column{-}rank(AB) \le \min\{column{-}rank(A), column{-}rank(B)\}$$

分析

这里给出了关于矩阵秩的一个性质（根据我们后面的内容可以知道，不仅是列秩，行秩和秩也都满足上述不等式。事实上实际上是要证两个不等式：

$$column{-}rank(AB) \le column{-}rank(A)$$
$$column{-}rank(AB) \le column{-}rank(B)$$

在不利用列秩等于行秩的情况下，两个不等式证明实际并不相同。但我们希望从直观上帮助大家理解一下这个不等式的意义。

- A 的列空间是由 A 的列向量的所有的线性组合组成的向量空间，即所有的 $A\mathbf{x}$，而 AB 的列空间其实可以看成所有的 $A(Bx)$，所有的 Bx 的可能值显然会比所有的 x 少，所以

$$column{-}rank(AB) \le column{-}rank(A)$$

- 如果 B 的若干列 $\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_j}$ 线性相关，则 $A\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, A\mathbf{b}_{i_j}$ 也线性相关，这意味着

$$column{-}rank(AB) \le column{-}rank(B)$$

我们会在学了线性变换后再次更深刻的理解这一性质。

解答. 先证明 $column{-}rank(AB) \le column{-}rank(A)$。
令 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$，则对于 AB 的任一列向量 $\mathbf{c}$ 都存在 $l_1, \ldots, l_n$ 使得：

$$\mathbf{c} = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_n\mathbf{a}_n$$

从而 $C(AB) \subseteq C(A)$，即：$dim(C(AB)) \le dim(C(A))$.
再证明 $column{-}rank(AB) \le column{-}rank(B)$。
令 AB 的列向量为 $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$。注意到对于任意的 $l_1, \ldots, l_k$:

$$l_1\mathbf{c}_1 + \ldots + l_k\mathbf{c}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow l_1A\mathbf{b}_1 + \ldots + l_kA\mathbf{b}_k = \mathbf{0} \Rightarrow l_1\mathbf{b}_1 + \ldots + l_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$$

所以对于 $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ 中的任一子集，如果其是线性无关的，那么对应的 B 的列向量也是线性无关的。所以 $dim(C(AB)) \le dim(C(B))$. $\square$

2. 求下列矩阵的 LU 分解:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

说明

事实上这是一个很有名的矩阵，它是帕斯卡矩阵，其对角线慢慢的是按二项式定理展开而得。我们这里用作展示 LU 分解的一个例子，大家也可以猜测一下 n 阶帕斯卡矩阵的 LU 分解的形式。

解答.

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以我们有:

$$E_{43}(-3)E_{42}(-3)E_{32}(-2)E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)P = U$$

从而:

$$L = E_{21}(1)E_{31}(1)E_{41}(1)E_{32}(2)E_{42}(3)E_{43}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

即其 LU 分解为:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

3. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

分析

我们仅以此例来展示逆矩阵的求法: $Gauss-Jordan$ 消元法。

解答.

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1&0&0\\1&5&3&0&1&0\\4&3&6&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&3&2&-1&1&0\\0&-5&2&-4&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&3&2&-1&1&0\\0&0&\frac{16}{3}&-\frac{17}{3}&\frac{5}{3}&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&3&2&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{17}{16}&\frac{5}{16}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&3&0&\frac{9}{8}&\frac{3}{8}&-\frac{3}{8}\\0&0&1&-\frac{17}{16}&\frac{5}{16}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\0&0&1&-\frac{17}{16}&\frac{5}{16}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\0&0&1&-\frac{17}{16}&\frac{5}{16}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}$$

所以我们有:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\-\frac{17}{16}&\frac{5}{16}&\frac{3}{16}\end{bmatrix}$$

当然大家也可以验证:

$$A^{-1}=E_{12}(-2)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}E_{23}(-2)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{3}{16}\end{bmatrix}E_{32}(\frac{5}{3})E_{31}(-4)E_{21}(-1)$$

□