线性代数

Worked Examples for Lecture 7

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 9 日

1. 找出下列矩阵 A 的行最简形 R，并回答 $rank(A)$ 和方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解的一组特解。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&6&3\\4&8&c\end{bmatrix}$$

分析

通过对矩阵 A 进行消元可得，当 $c=4$ 时其秩为 1，当 $c\neq 4$ 时其秩为 2。并得到其对应首元的位置，最后根据自由变量便可以构建出方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解的一组特解。

解答. 我们对矩阵 A 进行消元：

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&6&3\\4&8&c\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\4&8&c\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&c-4\end{bmatrix}$$

从而可以看到：

- 当 $c=4$ 时，$rank(A)=1$，此时已经是行最简形，即 $R=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，其有两个自由变元，故方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解的一组特解为 $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.
- 当 $c\neq 4$ 时，$rank(A)=2$，此时矩阵是行阶梯形，我们可以进一步消元：

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&c-4\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&c-4\\0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&c-4\\0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

其只有一个自由变元，故方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解的一组特解为 $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$.

□

2. 我们考虑如下的方程组：$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\2&4&8&12\\3&6&7&13\end{bmatrix},\quad 即：\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+5x_4=b_1\\2x_1+4x_2+8x_3+12x_4=b_2\\3x_1+6x_2+7x_3+13x_4=b_3\end{cases}$$

(1) 将 $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ 变成行阶梯形 $\begin{bmatrix} U & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ 的形式

(2) 给出 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\mathbf{b}$ 所需满足的条件。

(3) 描述 A 的列空间。

(4) 进一步将行阶梯形 $\begin{bmatrix} U & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ 变成行最简形 $\begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ 的形式。

(5) 描述 A 的零空间。

(6) 给出 $\mathbf{b} = (0, 6, -6)$ 的时候方程解的情况。

分析

这道题帮助大家再将整个方程组的解的求解过程串联一遍。

解答. (1) 我们对矩阵 $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ 进行消元：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 - 2b_2 \end{bmatrix}$$

(2) 注意到 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 有解，从而 $\mathbf{b}$ 所需满足的条件为

$$b_3 - 3b_1 - 2b_2 = 0$$

(3) A 的列空间为 A 的列向量的线性组合生成的空间，即

$$C(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

也可以表达为：满足 $b_3 - 3b_1 - 2b_2 = 0$ 的所有的向量集合。

(4) 我们对行阶梯形 $\begin{bmatrix} U & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ 进行进一步消元：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 - 2b_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -2b_1 - \frac{3}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 - 2b_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -2b_1 - \frac{3}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{b_2}{2} - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 - 2b_2 \end{bmatrix}$$

(5) A 的零空间为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解的集合，根据 R(U 也是可以的)，我们可以得到其自由变元为 x_2, x_4，从而可以构造出一组特解为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，即

$$N(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(6) 当 $\mathbf{b} = (0, 6, -6)$ 时，我们得到对应的行最简形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而我们可以得到一组特解 $(-9,0,3,0)$，因此方程组的解可以写成：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-9\\0\\3\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Remark 0.1

当转换称行最简形后，我们可以根据 $\mathbf{d}$ 直接得到对应方程组的一组特解（每个首元直接对应一个值）。

□

3. 给定方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中 A 是 $m\times n$ 的矩阵，秩 $rank(A)=r$。请根据下列情况判断矩阵 m,n,r 的关系和 $\mathbf{b}$ 所需要满足的条件。

(1) 方程恰好只有一个解。

(2) 所有的解都满足 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 的形式。

(3) 方程没有解。

(4) 所有的解都满足 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 的形式。

(5) 方程有无穷多解。

分析

关于 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解的判断，可以表示称如下的表：

m	n	$dim(N(A))$	$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解的个数
$=r$	$=r$	0	1
$=r$	$>r$	≥ 1	∞
$>r$	$=r$	0	0 *or* 1
$>r$	$>r$	≥ 1	0 *or* ∞

关键是要记住：$dim(N(A))+rank(A)=n$，并且：

- 当 $dim(N(A))=0$ 时，方程才可能有唯一解。
- 当 $dim(N(A))\neq 0$ 时，方程如果有解，就有无穷多个解。
- $rank(A)=m$ 时方程一定有解，这是因为此时其列空间是整个 $\mathbb{R}^m$。
- $rank(A)\leq \min\{m,n\}$，这意味着当 $rank(A)=n$ 时必然有 $m\geq n$。

解答.

方程恰好有一个解，这意味着 $dim(N(A))=0$，即 $rank(A)=n$，从而必然有 $m\geq n=r$。

首先我们有 $n=2$。并且其零空间为：

$$N(A) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

从而 $dim(N(A))=1$，$rank(A)=1$。$(2,1)$ 作为其一个特解，则有：

$$\mathbf{b} = 2 \text{ column } 1 \text{ of } A + 1 \text{ column } 2 \text{ of } A$$

方程没有解意味着 $\mathbf{b} \notin C(A)$，从而 $rank(A) < m$，这是唯一可以得知的条件。

首先我们有 $n=3$。并且其零空间为：

$$N(A) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

从而 $dim(N(A))=1$，$rank(A)=2$。$(1,1,0)$ 作为其一个特解，则有：

$$\mathbf{b} = 1 \text{ column } 1 \text{ of } A + 1 \text{ column } 2 \text{ of } A$$

方程有无数的解意味着 $dim(N(A)) \neq 0$，即 $rank(A) < n$，并且 $\mathbf{b} \in C(A)$. $\square$