线性代数

Worked Examples for Lecture 8

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 30 日

1. 假设 S 是 $\mathbb{R}^9$ 的一个子空间，并且 $dim(S)=6$.

(1) 跟 S 正交的子空间的维数可能是多少?

(2) S 的正交补 $S^\perp$ 的维数是多少?

(3) 如果一个矩阵 A 的行空间是 S，则 A 至少是多大的一个矩阵?

(4) 如果一个矩阵 B 的零空间是 S，则 B 至少是多大的一个矩阵?

分析

- 注意对于 $\mathbb{R}^n$，令 V 是其一个子空间，从而我们有：

$$\mathbb{R}^n = V + V^\perp$$

这个的一个直观理解就是 $\mathbb{R}^n$ 被分解成了两个部分，换句话说是一组正交基被划分到了两个不同的子空间，从而我们有：

$$dim(V) + dim(V^\perp) = n$$

并且由于 $V^\perp$ 是和 V 正交的最大子空间，从而任何与 V 正交的子空间维数都不会超过 $V^\perp$ 的维数。

- A 的行空间是 S，这首先说明 A 是一个 $m\times 9$ 的矩阵。其次为了满足 $C(A^T)=S$，我们需要 A 的行空间的维数等于 S 的维数，而这至少是行数，所以 $m\geq 6$.
- 对于零空间而言，我们只需注意到其和行空间互为正交补，从而可以转化为行空间是 $S^\perp$ 的问题。

解答.

- 可能的维数是 $0,1,2,3$.
- $S^\perp$ 的维数是 $9-6=3$.
- A 至少是 6×9 的矩阵。
- 该问题等价于问若 B 的行空间是 $S^\perp$，则 B 至少是多大的矩阵，从而 B 至少是 3×9 的矩阵。

□

2. 方程 $x-3y-4z=0$ 刻画了 R^3 中的一个平面（也是一个子空间）。

(1) 若 1×3 的矩阵 A 的零空间是这个平面，请给出一个可能的 A。

(2) 请给出 $x-3y-4z=0$ 对应的子空间的一组基。

(3) 请给出这个平面的正交补的一组基。

分析

这道题帮助大家再理解上面的概念，即正交补实际上是将一组正交基划分成了两个部分。

解答.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ 就是一个满足要求的矩阵。($A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff x - 3y - 4z = 0$)
- 注意到其有两个自由变元 (y,z)，所以我们有 $dim(N(A)) = 2$，分别令其自由变元为 1，则我们得到了该空间的两个向量：

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  从而 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 是其一组基。

解下列方程组：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得一组解 $(1, -3, -4)$. 所以正交补的一组基是 $(1, -3, -4)$. 这里也可以通过直接观察到 $(1, -3, -4)$ 是与 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 都正交的向量直接说明其是正交补的一组基，因为对应的正交补的维数是 1。 □

3. 请计算 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 到对应空间 V 上的投影，这里 V 用矩阵 A 的列空间表示。

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

分析

- 这里我们挑了列向量线性无关的矩阵作为求投影的示范，这个时候可以证明 A^TA 是可逆的，从而对应 V 中的 $A\mathbf{x}$ 中的 $\mathbf{x}$ 是唯一的。
- 如果 A 的列向量不是可逆的，则可能导致 A^TA 是不可逆的。但这时候大家要意识到，投影的本质是不改变的，即当 V 中的元素和其误差正交的时候是误差最小的时候。所以这种情况的一个简单处理就是从 A 中的列向量挑出线性无关的向量（即 $C(A)$ 的一组基）作为一个新矩阵 A'，此时两个矩阵的列空间是相同，从而可以使用列满秩的矩阵 A' 进行运算，即满足上述的要求。
- 第 2 和第 3 个例子是为了让大家看到，尽管这两个矩阵的列空间是相同的，但是其投影的计算难度是不一样的。差距在于第二个 A 中的列向量不仅是线性无关而且还是正交的，

而一般来说假设一组基 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 是两两正交的，则到其张成空间的投影 $\mathbf{p}$ 实际上就是到每个向量 $\mathbf{a}_i$ 上的投影 $\mathbf{p}_i$ 之和，即：

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n$$

- 对于求 $\mathbf{b}$ 到某条线 $\mathbf{a}_i$ 上的投影，我们实际上有两种方法：

(1) 通过投影矩阵 $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

(2) 直接计算系数 $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}$

虽然可以证明两者是一样的，但大家可以自己尝试一下，两种计算的复杂度是不一样的，前者需要算一个矩阵，后者只需要算两个内积就可以了。

解答.

- 计算 A^TA 和 $A^T\mathbf{b}$ 得：

$$A^TA = 2 \ A^T\mathbf{b} = 5$$

从而其投影 $\mathbf{p} = A\mathbf{x}$ 中的 $\mathbf{x} = \frac{5}{2}$，即其投影为：

$$\mathbf{p} = A\mathbf{x} = \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

- 计算 A^TA 和 $A^T\mathbf{b}$ 得：

$$A^TA = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \ A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

从而其投影 $\mathbf{p} = A\mathbf{x}$ 中的 $\mathbf{x}$ 为：

$$\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\4\end{bmatrix}$$

即其投影为：

$$\mathbf{p} = A\mathbf{x} = \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\4\end{bmatrix}$$

同时我们可以验证 $\mathbf{b}$ 到 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ 上的投影 $\mathbf{p}_1$ 和到 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 上的投影 $\mathbf{p}_2$ 为：

$$\mathbf{p}_1 = \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = 4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \text{ 即有} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

- 计算 A^TA 和 $A^T\mathbf{b}$ 得：

$$A^TA = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}, \ A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$

进一步计算 A^TA 的逆矩阵可得:

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

从而其投影 $\mathbf{p} = A\mathbf{x}$ 中的 $\mathbf{x}$ 为:

$$\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

即其投影为:

$$\mathbf{p} = A\mathbf{x} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

和上一问是相同的。同样我们还可以计算 $\mathbf{b}$ 到 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 上的投影 $\mathbf{p}_1$ 和到 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 上的投影 $\mathbf{p}_2$ 为:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{5}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{p}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \text{显然}\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$\square$