上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

10-行列式 (I)(Determinants(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 4 月 29 日

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，$\mathrm{rank}(A) = n$。

1. 我们知道如果 $\hat{x} \in \mathbb{R}$ 满足：

$$A^T(A\hat{x} - b) = \mathbf{0} \quad 即 \quad A^T A\hat{x} = A^T b$$

   则 $A\hat{x} - b$ 与 $C(A)$ 正交。

2. 我们可以得到 $\hat{x}$ 的表达式：

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

   并且我们知道 $\hat{x}$ 是唯一的。

3. 我们称 $\hat{x}$ 就是最小二乘解（least square solution），因为其误差的长度 $\|e\|$

$$e = b - A\hat{x}$$

   是所有 $b - Ax$ 中最小的。

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，$\mathrm{rank}(A) < n$。

1. 选择 $C(A)$ 的一组基 $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}\}$，其中 $r = \mathrm{rank}(A)$。
2. 定义 $m \times r$ 的矩阵：
$$A' = \begin{bmatrix} a_{i_1} & \cdots & a_{i_r} \end{bmatrix}$$
显然我们有：$C(A) = C(A')$
3. $\mathrm{rank}(A')$ 是列满秩的，所以我们可以利用前面的方法来找到 $A'x' = b$ 的最优近似解，即：
$$\hat{x}' = (A'^T A')^{-1} A'^T b \in \mathbb{R}^n$$
显然其误差 $e = b - A'\hat{x}'$ 是所有 $b - Ax$ 中长度最小的，即：
$$\|e\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \min\{\|b - v\| \mid v \in C(A')\} == \min\{\|b - v\| \mid v \in C(A)\}$$
4. 我们需要的 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 只要满足：
$$A\hat{x} = A'\hat{x}'$$

复习：标准正交、正交矩阵

定义 1 **[Orthonormal Vectors].**

$q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}^m$ 是标准正交的 (orthonormal)，如果：

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{当 } i \neq j\text{，即 } q_i \text{ 和 } q_j \text{ 是正交的} \\ 1 & \text{当 } i = j\text{，即 } q_i \text{ 是单位向量} \end{cases}$$

我们将列向量是标准正交的矩阵记为 Q，显然我们有：

$$Q^T Q = I$$

定义 2 **[正交矩阵 (Orthogonal Matrix)].**

称一个 $n \times n$ 的矩阵 Q 是正交矩阵 (Orthogonal Matrix)，如果：

$$Q^T Q = I$$

或者等价的说，其列向量 $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}^n$ 也是标准正交的。

复习：标准正交、正交矩阵 (II)

定理 3.

令 Q 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则:

$$Q\text{是正交矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad Q\text{是可逆的并且 } Q^{-1} = Q^T$$

推论 4.

如果 Q 是一个正交矩阵，则其行向量也是标准正交的。

定理 5.

令 Q 是一个 $n \times n$ 的正交矩阵，则对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$，我们有:

1. $\|Qx\| = \|x\|$
2. $Qx \cdot Qy = x \cdot y$

复习：Gram-Schmidt 正交化

定理 6.

令 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^m$ 是线性无关的。则存在一组向量 $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}^m$，满足：

- 对于任意的 $i \neq j \in [n]$，$q_i \perp q_j$。
- $\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \mathrm{span}(\{q_1, \cdots, q_n\})$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= a_1 \\
q_2 &= a_2 - \frac{q_1^T a_2}{q_1^T q_1} q_1 \\
q_3 &= a_3 - \frac{q_1^T a_3}{q_1^T q_1} q_1 - \frac{q_2^T a_3}{q_2^T q_2} q_2 \\
&\vdots \\
q_n &= a_n - \frac{q_1^T a_n}{q_1^T q_1} q_1 - \frac{q_2^T a_n}{q_2^T q_2} q_2 - \cdots - \frac{q_{n-1}^T a_n}{q_{n-1}^T q_{n-1}} q_{n-1}
\end{aligned}
$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 7.

令 A 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵，则存在一个正交矩阵 Q 和一个主对角元是正数的上三角矩阵 R，使得

$$A = QR$$

特别的，该分解是唯一的。

$$A = QR = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{\|q_1\|} & \cdots & \frac{q_n}{\|q_n\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|q_1\| & \frac{q_1^T a_2}{\|q_1\|} & \cdots & \frac{q_1^T a_n}{\|q_1\|} \\ 0 & \|q_2\| & \cdots & \frac{q_2^T a_n}{\|q_2\|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|q_n\| \end{bmatrix}$$

主要内容

- 什么是行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算

什么是行列式

什么是行列式?

第一次学行列式的时候，碰到的两个问题:

- 什么是行列式?
- 行列式有什么用?

国内的教材

上海师范大学 Shanghai Normal University

目　录

学到的知识

上海师范大学 Shanghai Normal University

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{(A)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{detA_n}{detA}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} A_{11} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} A_{1n}$$

$$= (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

但是

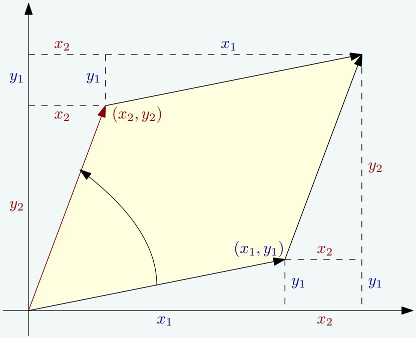
为什么？

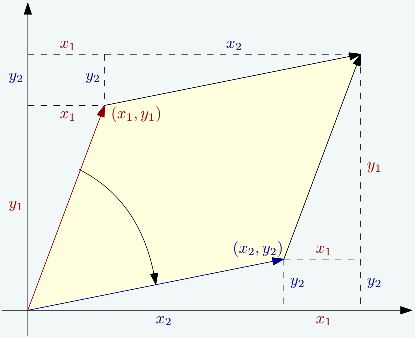
行列式究竟想算什么？

我们以 2×2 的行列式为例：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

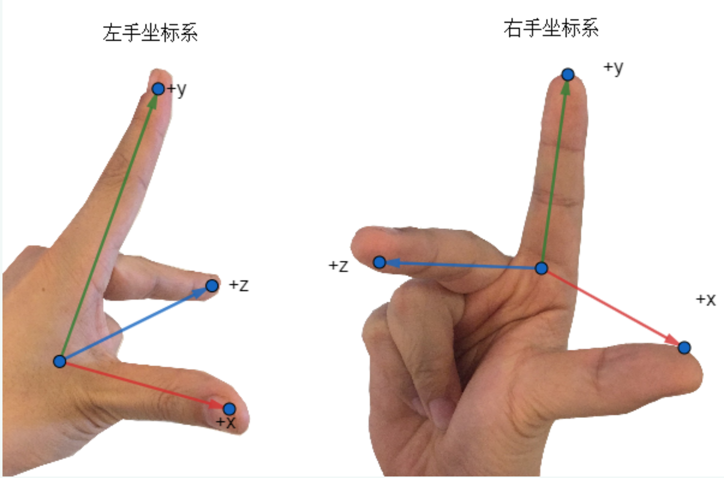
向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的有向面积





三维空间的有向体积

左手系 VS 右手系



n 维空间的有向体积

对于 n 维空间 n 个向量构成的多面体:

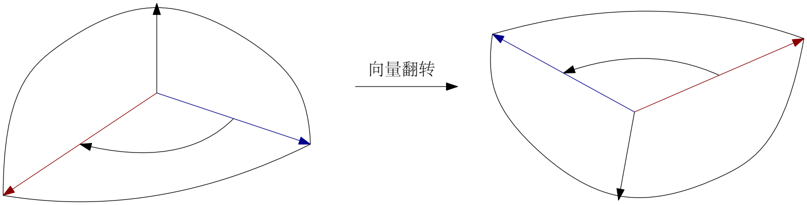
$$a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n, \quad \text{记其体积为 } D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n)$$

我们将其两个向量对换位置:

$$a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n, \quad \text{记其体积为 } D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$$

我们应当有:

$$D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$$



行列式的一个前瞻

行列式想求取的是：

在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

但行列式的值，存储了对应方阵的很多信息。

- (Pivot Formula)，我们将证明 $\det A$ 和 A 中所有首元的乘积的绝对值相同。
- (Big Formula), 我们将说明 $\det A$ 是 $n!$ 个不同元素组合之和。
- (Cofactor Expansion)，我们将证明 $\det A$ 是 A 中一些子行列式的线性组合。

从而我们可以得到很多矩阵的性质。

1. (Invertibility)，A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$。
2. (Rank)，A 的秩等于 A 的行列式的非零子式的个数。
3. (Cramer Rules)，我们可以用行列式来求解线性方程组。
4. (Eigenvalues)，这是我们接下来要讨论的内容。
5. $\cdots$

令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$是由 $a_1, \cdots, a_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

我们希望通过其的基本性质最终给出行列式对应的值，即最终一步一步得到 $\det(A)$ 相当于关于 $a_1, \cdots, a_n$ 的函数：

$$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

行列式的性质

对于 $\mathbb{R}^n$ 的如下 n 个向量:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$D(e_1, \cdots, e_n) = 1$$

这也就是

- $\det(I) = 1$。

对于 n 个 $\mathbb{R}^n$ 的向量

$$a_1, \cdots, a_n$$

我们有:

$$D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$$

这也就是:

- 交换两列改变行列式的符号:

$$\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n \end{bmatrix}) = -\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_j \cdots a_i \cdots a_n \end{bmatrix})$$

行列式的基本性质 (III)

上海师范大学 Shanghai Normal University

行列式的值应当对于每列都是线性的:

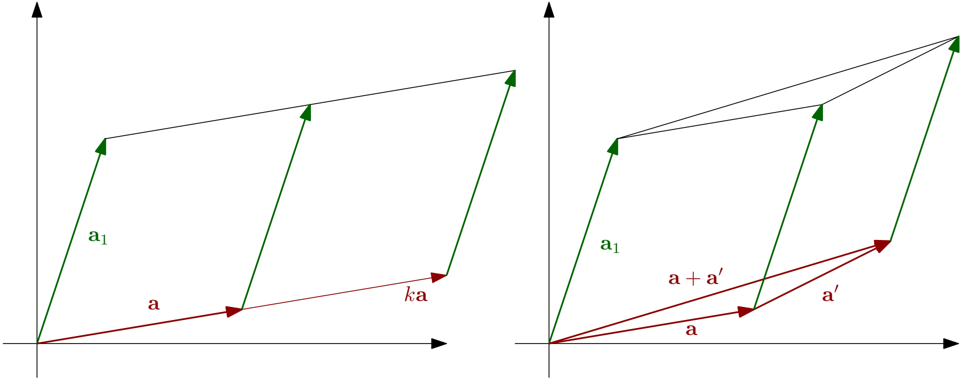
- $D(a_1, \cdots, ca_i, \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$。
- $D(a_1, \cdots, a_i + a_i', \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + D(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$。

这也就是:

- 行列式的值对于每一列都是满足线性的:

$$\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots (ca_i + da_i') \cdots a_n \end{bmatrix}) = c\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_i \cdots a_n \end{bmatrix}) + d\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_i' \cdots a_n \end{bmatrix})$$

基本性质 (III) 在 2 维的几何解释



记 S_1 是 a, a_1 张成的平行四边形的有向面积，S_2 是 ka, a_1 张成的平行四边形的有向面积,S_3 是 a', a_1 张成的平行四边形的有向面积,S_4 是 $a+a', a_1$ 张成的平行四边形的有向面积，则:

$$S_2 = kS_1$$

$$S_4 = S_1 + S_3$$

回顾我们目前所做的，对于 n 维空间的 n 个向量 $a_1, \cdots, a_n$，我们希望定义一个函数 D, 满足下列性质：

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

我们希望说明：

D是存在的且唯一的

而这就是我们想要的行列式，即：

$$\det(A) = \det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix}) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

我们也会将其记作：

$$|A| \text{ 或者 } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在接下来的内容中，我们将分不加区分的使用 $n \times n$ 的矩阵 A 和其 n 个对应的列向量 $a_1, \cdots, a_n$。

定理 8.

- 如果 A 存在一个列向量是 0，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在两列向量相同，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，则 $\det(A) = 0$。

证明. 不妨假设 A 的第一列是 $a_1 = \mathbf{0}$，则我们有:

$$D(a_1', \cdots, a_n) = D(a_1 + a_1', \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n) + D(a_1', \cdots, a_n)$$

从而:

$$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n) = D(\mathbf{0}, \cdots, a_n) = 0$$

证明.

- 如果 A 存在两列向量相同，不妨记为 $a_i = a_j$，则我们有：

  $$D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n)$$

  从而：

  $$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，不妨记为 $a_i = ca_j$，则我们有：

  $$\det(A) = D(a_1, \cdots, ca_j, \cdots, a_j, \cdots a_n) = cD(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$$

$\square$

定理 9.

如果 $\operatorname{rank}(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$。

证明. 由 $\operatorname{rank}(A) < n$ 可知 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性相关的，即存在 $1 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ 和 $c_1, \ldots, c_k$ 使得:

$$a_{i_0} = c_1 a_{i_1} + \cdots c_k a_{i_k}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}
\det(A) =& D(a_1, \cdots, a_{i_0}, \cdots, a_n) \\
=& D(a_1, \cdots, c_1 a_{i_1} + \cdots c_k a_{i_k}, \cdots, a_n) \\
=& \sum_{j=1}^{k} c_j D(a_1, \cdots, a_{i_j}, \cdots, a_{i_j}, \cdots, a_n) \\
=& 0
\end{aligned}$$

$\square$

定理 10.
将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变)，行列式的值保持不变。

证明. 利用：

- $D(a_1, \cdots, ca_j, \cdots, a_j, \cdots a_n) = cD(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$

可知：

$$D(a_1, \cdots, a_i + \sum_{i=1}^{n} c_i a_i, \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

$\square$

定理 11.

令 A 是一个 $n \times n$ 的对角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$$

定理 12.

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangluar matrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

阶段总结

- 行列式的几何意义。
- 行列式需要满足的基本性质。
- 由这些性质衍生的一些性质。

我们的目标

考虑一个 $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 的函数 D，其满足下列三个性质:

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

我们希望说明，这样的函数D 存在而且唯一，从而其就是对应的行列式 $\det(A)$。

我们的思路

为了证明这样的 D 存在且唯一，我们希望：

- 通过 D 的性质，我们尝试计算出对于任意的 $n \times n$ 的矩阵 A，其对应的函数值。
- 如果对于每个 $n \times n$ 的矩阵 A，我们都能计算出一个唯一的函数值，那么我们就可以说明 D 是存在且唯一的。

行列式的计算

列加法

令 $i, j \in [n]$，我们将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + l a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + l a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = \det(A)$$

列交换

令 $i, j \in [n]$，我们将第 j 列和第 i 列互换，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = -\det(A)$$

列乘法

令 $i \in [n]$ 和 $l \in \mathbb{R}$，我们将第 i 列乘以 l 倍，我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = l \det(A)$$

计算任意 $n \times n$ 矩阵的行列式的值

计算行列式 A 的值

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 A^T 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 A^T 的行阶梯形 R。从而 R^T 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 $d_1, \cdots, d_n$，则我们有：
$$\det(R^T) = d_1 \cdots d_n$$
2. 我们根据 A 变成 R^T 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

定理 13.

$\mathrm{rank}(A) = n$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$。

考察 2×2 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{vmatrix} = a \cdot (d - \frac{cb}{a}) = ad - bc$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{2} = -4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{10} \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{5}) \cdot 0 = 0$$

一些例子 (IV)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a-\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a-\frac{1}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1}(a-\frac{1}{a}) = a^n - a^{n-2}$$

D 的存在性

回顾一下我们对 $\det A$ 的计算:

1. 根据我们的理解，$\det A$ 如果存在，一定要满足三条基本性质。
2. 我们推得了关于 $\det A$ 的一些其他性质。
3. 通过上述的讨论，我们知道了初等列变换对 $\det A$ 的影响。
4. 而通过初等列变换，我们可以将 A 转变成一个下三角矩阵 L.
5. 我们知道 $\det(L)$ 是多少，从而根据 3 和 4，我们可以从 $\det L$ 得到 $\det(A)$ 的值。

上述的过程说明了 $\det A$ 的存在性

- 我们描绘了行列式想计算的内容

  在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积
- 由此发出，我们假定了 $\det(A)$ 该满足的三条性质
  1. $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
  2. $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
  3. $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$
- 我们通过这三条性质推导了一些其他性质。
- 我们通过初等列变换，将 A 转变成一个下三角矩阵 L，从而得到了 $\det(A)$ 的值。这一构造过程，说明了 $\det(A)$ 的存在性。