《线性代数》

11-行列式 (II)(Determinants(II))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 5 月 11 日

复习：行列式的几何解释

令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$是由 $a_1, \cdots, a_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

我们希望通过其的基本性质最终给出行列式对应的值，即最终一步一步得到 $\det(A)$ 相当于关于 $a_1, \cdots, a_n$ 的函数:

$$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

复习：行列式的基本性质

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 1.

- 如果 A 存在一个列向量是 0，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在两列向量相同，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，则 $\det(A) = 0$。

定理 2.

如果 $\operatorname{rank}(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$。

定理 3.

将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变)，行列式的值保持不变。

定理 4.

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangluar matrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

令 $i, j \in [n]$，我们将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + la_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + la_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = \det(A)$$

复习：列变换对行列式值的影响 (II)

令 $i, j \in [n]$，我们将第 j 列和第 i 列互换，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = -\det(A)$$

令 $i \in [n]$ 和 $l \in \mathbb{R}$，我们将第 i 列乘以 l 倍，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = l\det(A)$$

计算行列式 A 的值

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 $A^{\top}$ 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 $A^{\top}$ 的行阶梯形 R。从而 $R^{\top}$ 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 $d_1, \cdots, d_n$，则我们有：
$$\det(R^{\top}) = d_1 \cdots d_n$$
2. 我们根据 A 变成 $R^{\top}$ 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

定理 5.

$\operatorname{rank}(A) = n$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$。

通过一步步构造 $\det A$ 的方式，我们给出了 $\det A$ 的存在性。

主要内容

- 行列式更多的性质
- 行列式的正式定义
- 行列式的展开

行列式更多的性质

我们将证明:

定理 6 **[Transpose].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

定理 7 **[Product of Determinants].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，B 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

这也说明，对矩阵的初等行变换对行列式的影响跟初等列变换是完全相同的

推论 8.

给定一个正交矩阵 Q，我们有:

$$\det(Q) = \pm 1$$

这说明，在 $\mathbb{R}^n$ 中由 n 个标准正交 (orthonormal) 基向量构成的平行六面体的体积是 1。

证明. 注意到:

$$Q^T Q = I$$

从而我们有:

$$1 = \det(I) = \det(Q)\det(Q^T) = \det(Q)\det(Q) = (\det(Q))^2 \quad \Longrightarrow \quad \det(Q) = \pm 1$$

$\square$

引理 9.

令 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，E 是一个 $n\times n$ 的初等矩阵，则我们有:

$$\det(AE)=\det(A)\det(E)$$

推论 10.

令 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，$E_1,\cdots,E_k$ 是 $n\times n$ 的初等矩阵，则我们有:

$$\det(AE_1E_2\cdots E_k)=\det(A)\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)$$

特别的:

$$\det(E_1E_2\cdots E_k)=\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)$$

回顾三种初等矩阵

注意到 E 是下列三种矩阵的一种:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}}_{E_{ij}(k)},
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}}_{P_{ij}},
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}}_{D_i(k)}
$$

注意到 AE 是对 A 进行相应的列变换操作，所以我们只需要检查每种初等矩阵是否满足 $\det(AE) = \det(A)\det(E)$ 即可。

引理9的证明-$E_{ij}(k)$ 的情况

令 $A = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_n \end{bmatrix}$，注意到:

$$AE_{ij}(k) = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_i + ka_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned} \det(E_{ij}(k)) &= \det(I) = 1 \\ \det(AE_{ij}(k)) &= D(a_1, \cdots, a_i + ka_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\ &= D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) + kD(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

即:

$$\det(AE_{ij}(k)) = \det(A)\det(E_{ij}(k))$$

引理9的证明-P_{ij} 的情况

上海师范大学 Shanghai Normal University

令 $A=\left[a_1,\cdots,a_n\right]$，注意到：

$$AP_{ij}=\left[a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n\right]$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}\det(P_{ij})&=-\det(I)=-1\\ \det(AP_{ij})&=D(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n)\\ &=-D(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\\ &=-\det(A)\end{aligned}$$

即：

$$\det(AP_{ij})=\det(A)\det(P_{ij})$$

引理9的证明-$D_i(k)$ 的情况

上海师范大学 Shanghai Normal University

令 $A = \left[a_1, \cdots, a_n\right]$，注意到：

$$AD_i(k) = \left[a_1, \cdots, ka_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n\right]$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}
\det(D_i(k)) &= k\det(I) = k \\
\det(AD_i(k)) &= D(a_1, \cdots, ka_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\
&= kD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\
&= k\det(A)
\end{aligned}$$

即：

$$\det(AD_i(k)) = \det(A)\det(D_i(k))$$

回顾 Gauss–Jordan 消元法:

$$\color{red}{D \cdots E \cdots P \cdots E} \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

我们有:

定理 11.

每个可逆矩阵都可以由一系列的初等矩阵的乘积得到。

定理 6 **[Transpose].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有：

$$\det(A) = \det(A^T)$$

证明.

1. 对于每个初等矩阵 E，我们有 $\det(E) = \det(E^T)$。
2. 如果 A 不是可逆的，则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T) < n$，从而
$$\det(A) = \det(A^T) = 0$$
3. 如果 A 是可逆的，则存在一系列的初等矩阵 $E_1, \cdots E_l$ 使得：
$$A = E_1 \cdots E_l$$
从而 $A^T = E_l^T \cdots E_1^T$，因此：
$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(E_1) \cdots \det(E_l) \\ &= \det(E_1^T) \cdots \det(E_l^T) = \det(E_l^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_l^T \cdots E_1^T) = \det(A^T)\end{aligned}$$

定理7的证明

我们现在来证明：

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

证明. 如果 B 是可逆的，则存在一系列的初等矩阵 $E_1, \cdots E_k$ 使得：

$$B = E_1 \cdots E_k$$

从而：

$$\begin{aligned} \det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_k) &= \det(A)\det(E_1)\cdots\det(E_k) \\ &= \det(A)\det(E_1 \cdots E_k) = \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

如果 B 不是可逆的，则 AB 也不可逆，否则：

$$I = (AB)^{-1}AB = ((AB)^{-1}A)B$$

所以此时我们有：

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$$

□

我们来展示 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 的一个运用。考察下列的方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{(记作 } Ax = b\text{)}$$

注意到:

$$A \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax & Ae_2 & Ae_3 & \cdots & Ae_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

一个运用-Cramer 法则 (II)

记下列矩阵为 A_1:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

则我们有:

$$\det(A)x_1 = \det(A_1), \quad \text{即:} \ x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

对于任意的 $i \in [n]$，令 A_i 是将 A 的第 i 列替换成 b 后的矩阵，则我们有：

$$A\begin{bmatrix} 1 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae_1 \cdots Ax \cdots Ae_n \end{bmatrix} = A_i \quad \Longrightarrow \det(A)x_i = \det(A_i)$$

从而方程组 $Ax = b$ 的解可以表示为：

$$x = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

这就是克拉默法则 (Cramer’s Rule)

另一个应用-$\det(A)$ 跟首元的关系

令可逆矩阵 A 的首元为 $p_1, \cdots, p_n$，通过 Gauss 消元法我们可以将矩阵 A 变为如下的行阶梯形矩阵:

$$U = \begin{bmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

由于上述过程只使用了行加法和行交换操作 (列加法或者列交换)，从而我们有:

$$\det(A) = \det(U) = p_1p_2\cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1p_2\cdots p_n$$

即:

$$|\det(A)| = |p_1p_2\cdots p_n|$$

行列式的正式定义

矩阵的线性展开 (I)

考虑一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到其每个列向量:

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

从而由行列式的线性性，我们有:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = D(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} D(e_1, \cdots, a_n)$$

如果我们将矩阵的每一列都按上述方式展开，则:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n})$$

上述等式一共有n^n项。由行列式的性质，如果存在 $i_k = i_j$，则我们有:

$$D(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}, \cdots, e_{i_j}, \cdots e_{i_n}) = 0$$

从而上述等式可以转化为:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i_1 \in [n]} \sum_{\substack{i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \cdots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n})$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们来观察一下这个式子:

$$D(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i_1\in[n]}\sum_{\substack{i_2\in[n]\\ i_2\neq i_1}}\cdots\sum_{\substack{i_n\in[n]\\ i_n\neq i_1,\cdots,i_n\neq i_{n-1}}} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}D(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$$

事实上, $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个置换。

例 7.

- $1,3,2,4$ 就是 $1,2,3,4$ 的一个置换。
- c,d,e,a,b 是 a,b,c,d,e 的一个置换。

置换 (permutation)(II)

定义 8 **[Permutation].**

固定一个 $n \in \mathbb{N}$，一个 $[n]$ 的置换 (Permutation) 是一个 $[n] \to [n]$ 的双射函数 (bijective function)σ，并且我们定义:

$$\mathrm{Perm}(n) = \{\sigma \mid \sigma\text{是 } [n] \text{ 的一个置换。}\}$$

从而我们可以将上述表达式改写为:

$$\begin{aligned} D(a_1, \cdots, a_n) &= \sum_{i_1 \in [n]} \sum_{\substack{i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \cdots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} D(e_\sigma(1), \cdots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

置换矩阵的行列式

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们需要搞清楚 $D(e_{\sigma}(1), \cdots, e_{\sigma(n)})$ 是什么，注意到：

$$P = \left[e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)} \right]$$

是一个置换矩阵。

1. P 可以通过若干次列交换操作变成单位矩阵 I。
2. 每次列交换操作改变其行列式的符号。
3. 从而 $\det(P) = (-1)^k$，这里 k 是列交换的次数。

注意!

这里的 k 是不唯一的!

关于行列式-A Big Picture

1. 我们希望定义 $\det A$ 来表示：由 $a_1, \cdots, a_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。
2. 我们发现 $\det A$ 需要满足三个基本的性质：
   - $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
   - $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
   - $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$
3. 通过这三个基本的性质，我们计算出了行列式的表达：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} D(e_{\sigma}(1), \cdots, e_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

这里 k_σ 是置换矩阵 $\left[e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right]$ 变成单位矩阵 I 所需要的列交换的次数。但我们还面临一个问题：

k_σ 并不唯一，所以我们不能用上述式子作为 $\det(A)$ 的定义。

逆序数 (Inversion numbers)(I)

令 $\sigma : [n] \to [n]$ 是一个置换，我们用如下的方式进行简写：

$$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$$

比如，我们称：

4213就是 1234 的一个置换。

观察这些置换的特点：

- 其中存在在前面但是更大的数，比如在 4213 中，4 在 2 前面，但是 $4 > 2$.

我们称这样的一堆数为逆序对，而一个置换中的逆序对的个数为这个置换的逆序数 (Inversion Number)

定义 9 **[Inversion numbers].**

给定一个置换 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$，其逆序数 (Inversion number)$\tau(\sigma)$定义为：

$$\tau(\sigma)=|\{(p,q)\mid 1\leqslant p<q\leqslant n \text{ 并且 } \sigma(p)>\sigma(q)\}|$$

例 10.

- $\tau(4213)=4.$
- $\tau(1324)=1$
- $\tau(3241)=3.$

逆序数-变成单位矩阵的次数！(I)

观察到：

$$\tau(4213)=4 \implies 4213 \to 2413 \to 2143 \to 2134 \to 1234$$

$$\tau(1324)=1 \implies 1324 \to 1234$$

$$\tau(3241)=3 \implies 3214 \to 2314 \to 2134 \to 1234$$

逆序数恰好可以作为一个将置换 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 变回 $123\cdots n$ 的个数！

定理 11.

给定置换矩阵

$$P=\left[e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}\right]$$

我们可以通过 $\tau(\sigma)$ 次列交换将其变回单位矩阵 I。

这意味着我们可以用 $\tau(\sigma)$ 来定义 k_σ！

逆序数-变成单位矩阵的次数！(II)

定理11的证明. 注意到对于一个置换 σ，我们有：

$$\tau(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|\{t \mid t>i \text{ 并且 } \sigma(i)>\sigma(t)\}|$$

从而对于置换矩阵我们可以定义如下的列交换操作, 初始令 $k=n$:

1. 不妨令 $k=\sigma(t)$，令 $t_1<t_2<\cdots<t_j$ 是满足 $k>\sigma(t_i)$ 的位置。依次将第 k 列与第 t_i 列进行交换，共交换 j 次。
2. 令 $k=k-1$，重复上述过程。

注意到上述列交换的总数恰好是置换 σ 的逆序数 (为什么？)，从而定理得证。 $\square$

现在我们就可以得到行列式的正式定义了。

定义 12.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们定义：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

定理 13.

$\det(A)$ 满足下列性质：

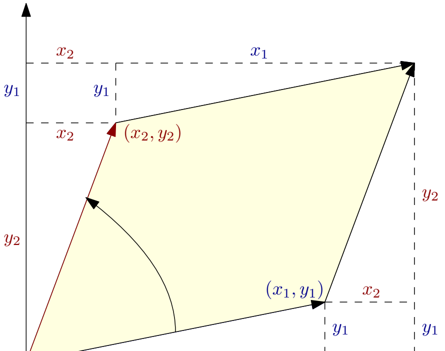
- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

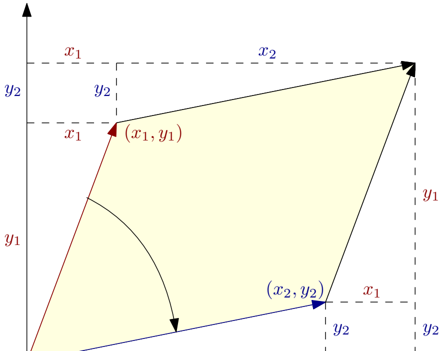
对于一个 2×2 的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

一共有 $12, 21$ 两种不同的置换，从而我们有:

$$\det(A)=(-1)^{\tau(12)}x_1y_2+(-1)^{\tau(21)}x_2y_1=x_1y_2-x_2y_1$$





例子-3×3 的情况 (I)

对于一个 3×3 的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

其一共有 $123, 132, 213, 231, 312, 321$ 六种不同的置换，并且:

$$\tau(123)=0,\ \tau(132)=1,\ \tau(213)=1,\ \tau(231)=2,\ \tau(312)=2,\ \tau(321)=3$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(A)=&(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}\\ &+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}\\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

例子-3×3 的情况 (II)

这也就是书本中常见的三阶行列式计算的记忆方式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

定理 14 **[Uniqueness].**

$\det(A)$ 是唯一一个 $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n个} \to \mathbb{R}^n$ 的函数满足下述三个性质:

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

证明. 我们前面已经证明，满足这三个性质的函数具备如下的性质:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

根据前面的讨论，k_σ 可以用 $\tau(\sigma)$ 来替代，从而:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det(A)$$

这就完成了唯一性的证明。 $\square$

行列式的展开

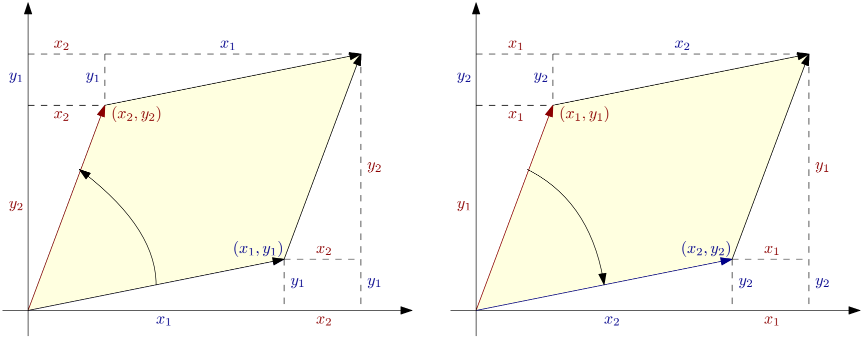
回顾 2×2 的行列式

对于一个 2×2 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

一共有 $12, 21$ 两种不同的置换，从而我们有:

$$\det(A) = (-1)^{\tau(12)} x_1 y_2 + (-1)^{\tau(21)} x_2 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$



这可以看成是 $\det(A)$代数余子式展开 (Cofactor Expansion)的一个特殊情况。

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，并且 $n \geqslant 2$。对于任意的 $i, j \in [n]$，我们定义：

M_{ij} 是将 A 第 i 行第 j 列的元素删去后得到的 $n-1 \times n-1$ 的矩阵。

定义 15 **[Cofactor].**

下列数：

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

称之为代数余子式 (Cofactor)，特别的 $\det(M_{ij})$ 称之为余子式。

定理 16.

1. $\det\left(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}\right) = a.$
2. 对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

定理16的证明 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们对其第一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只需要证明，对任意的 $i \in [n]$ 有:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1}) = (-1)^{i-1}a_{i1}\det(M_{i1})$$

定理16的证明 (II)

对其第 i 行向上交换 $i-1$ 次可得:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只要证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \det(M_{i1})$$

定理16的证明 (III)

通过行列式的性质，我们注意到:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & M_{i1} \end{vmatrix}$$

也就是要证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & M_{i1} \end{vmatrix} = a\,\det(M_{i1})$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

引理 17.

我们有： $\det(A)=\begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix}=a\det(B)$

证明.

$$\begin{aligned}
\det(A)=\begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma\in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Perm}(n)\\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} a\, a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= a \sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Perm}(n)\\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} b_{\sigma(2)-1,1}\cdots b_{\sigma(n)-1,n} \\
&= a \sum_{\delta\in \mathrm{Perm}(n-1)} (-1)^{\tau(\delta)} b_{\delta(1),1}\cdots b_{\delta(n-1),n-1} = a\det(B)
\end{aligned}$$

□

定理 18.

1. $\det(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}) = a.$
2. 对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{1i}C_{1i} + \cdots + a_{1i}C_{1i}$$

思路

只需要将第 j 列做 $j-1$ 次列交换换到第 1 列即可。

Shanghai Normal University 上海师范大学

定理18的证明. 通过 $i-1$ 次列交换，我们可以将第 i 列逐步换到第 1 列，即：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

从而：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}(a_{1i}C'_{11} + a_{2i}C'_{12} + \cdots + a_{ni}C'_{1n})$$

$$= (-1)^{i-1}(a_{1i}(-1)^{1+1}\det(M_{1i}) + a_{2i}(-1)^{2+1}\det(M_{2i}) +$$

$$\cdots + a_{ni}(-1)^{n+1}\det(M_{ni}))$$

$$= (-1)^{1+i}a_{1i}\det(M_{1i}) + (-1)^{2+i}a_{2i}\det(M_{2i}) + \cdots + (-1)^{n+i}a_{ni}\det(M_{ni})$$

$$= a_{1i}C_{1i} + \cdots + a_{1i}C_{1i}$$

定理 19.

1. $\det(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}) = a$.
2. 对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

证明. 只要注意到 $\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}})$ 即可。 □

计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

证明. 我们根据其第一列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 12 - 8 - 6 = -2$$

□

我们也可以按第二列进行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

也可以选择按第第二行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

记下列的矩阵为 D_n：

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算 $\det(D_n)$

证明. 我们按第一行展开:

$$\det(D_n) = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})$$

$\square$

我们有:

$$\det(D_n) = 2\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})$$

注意到:

$$\det(D_1) = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \det(D_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

我们可以根据上述递推式得到:

$$\det(D_n) = n + 1$$

□

下列是 Vandermonde 矩阵:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

证明其行列式值为:

$$\det(V_n) = \Pi_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i)$$

证明. 我们通过归纳法来计算 $\det(V_n)$。

- $n = 2$ 时，我们有:

$$\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

一些例子 (III)-续

考虑 n 的时候，我们的策略是先用行变换将第一列除了第一个元素全部变为 0，再将行列式按第一列展开，即：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}$$

一些例子 (III)-续

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
\to \cdots \to
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\
0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\
0 & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1)
\end{bmatrix}
$$

从而我们有:

$$
\det(V_n) = \begin{vmatrix}
x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\
x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1)
\end{vmatrix}
= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)
\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}
\end{vmatrix}
$$

由归纳假设我们有:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \Pi_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i)$$

从而我们有:

$$\det(V_n) = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\Pi_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i) = \Pi_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i)$$

□

我们已经阐述了克拉默法则 (Cramer's Rule)在解方程中的作用。现在让我们来用它解决一下 A^{-1}。注意到 $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_n \end{bmatrix}$ 等价于如下 n 个方程组:

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, \cdots, Ax_n = e_n$$

特别的:

$$Ax_1 = A\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而，通过 Cramer's Rule 我们有对任意的 $i \in [n]$:

$$x_{i1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{C_{1i}}{\det(A)}$$

回到 Cramer 法则-求 A^{-1}(II)

Shanghai Normal University

更一般的来说，对于 $j \in [n]$

$$
Ax_j = A\begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

同样通过 Cramer's Rule 我们有对任意的 $i \in [n]$:

$$
x_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{C_{ji}}{\det(A)}
$$

从而我们有:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

定义 20 **[Adjugate Matrix].**

称下列矩阵:

$$A^{*}=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵 (Adjugate Matrix)。

定理 21.

$AA^{*}=\det(A)I$

阶段总结-关于行列式

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 转置矩阵、矩阵乘法和行列式的关系。
  - $\det(A) = \det(A)^T$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
  - 行列式跟首元的关系:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

- 行列式的正式定义，The Big Formula:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

- 代数余子式，行列式按行 (列) 展开:

$$\det(A) = a_{1i} C_{1i} + \cdots + a_{1i} C_{1i}$$

- Cramer's Rule，用行列式解方程，求矩阵的逆，伴随矩阵。