《线性代数》

16-复习 (Review)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 6 月 13 日

主要内容

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 课程总结
- 考试内容

课程总结

目录 I

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 线性代数课程介绍 (Introduction to Linear Algebra)
  - 什么是线性代数
- 向量 (Vectors)
  - 向量加法和数乘
  - 向量长度和点积
  - 矩阵
- 解线性方程组 (I)(Solving Linear Equations(I))
  - 线性方程组
  - 解线性方程组的矩阵表示
- 矩阵 (Matrices)
  - 矩阵的运算
  - 分块矩阵
  - 逆矩阵
  - 转置矩阵和置换矩阵

目录 II

上海师范大学
Shanghai Normal University

- 向量空间 (Vector Space)
  - 向量空间的基本概念
  - 子空间
- 相关性、基和维度 (Independence, Basis and Dimension)
  - 线性相关性
  - 向量空间的基和维度
- 矩阵的列秩与行秩 (Column Rank and Row Rank of Matrices)
  - 列空间的秩与行空间的秩
  - 通过 Gauss–Jordan 消元法来求 A^{-1}
- 解线性方程组 (II)(Solving Linear Equations(II))
  - 矩阵的秩
  - $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解
  - $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解

目录 III

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 正交和投影 (Orthogonality and Projection)
  - 正交性
  - 投影
  - 投影到一条直线
  - 投影到一个子空间
- 最小二乘，标准正交基 (Least Square Approximations, Orthonormal Bases)
  - 最小二乘法
  - 标准正交基和 Gram-Schmidt 正交化
- 行列式 (Determinants)
  - 什么是行列式
  - 行列式的性质
  - 行列式的计算
  - 行列式更多的性质
  - 行列式的正式定义
  - 行列式的展开
- 特征值与特征向量 (Eigenvalues and Eigenvectors)
  - 特征值介绍
  - 对角化矩阵

目录 IV

- 对称矩阵和正定矩阵 (Symmetric Matrices and Positive Definite Matrices)
  - 对称矩阵
  - 正定矩阵
  - 特征空间、代数重数以及几何重数
- 线性变换 (Linear Transformation)
  - 线性变换的概念
  - 线性变换的矩阵形式
  - 线性变换的像和核
  - 对偶性 (Duality)
- 奇异值分解 (Singular Value Decomposition)
  - SVD 基础
  - 用线来拟合数据
  - 用 k 维子空间拟合数据
  - 再看 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的近似解

”线性”的概念

考虑如下的函数：

$$f(x) := 3x$$

这是一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的**线性函数**。

- 从几何的角度来讲，这是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一条线。
- 从代数的角度来讲，对于任意的 $x_1, x_2, c, x \in \mathbb{R}$ 我们有：

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) \\ f(cx) &= cf(x) \end{aligned}$$

线性方程组

上海师范大学 Shanghai Normal University

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{matrix}
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

线性方程组

1. 线性方程组的表示-利用矩阵。
2. 解线性方程组：Gauss–Jordan 消元法，矩阵 LU 分解。
3. 特殊的线性方程组-n 个未知数 n 个方程的情况。
4. 一般方程组的解的情况-$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵

1. 矩阵的基本概念、运算、分块矩阵。
2. 一些特殊的矩阵-逆矩阵、转置矩阵、置换矩阵、初等矩阵等。
3. 矩阵表示的四个向量空间。
4. 矩阵的列秩、行秩和秩。

空间 $\mathbb{R}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\mathbf{v}$:

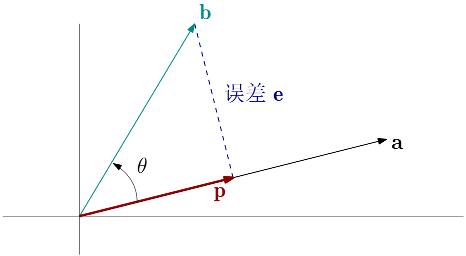
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{R}$，这里的 $\mathbb{R}$ 是实数集。

向量空间

1. 一般向量空间的定义。
2. 子空间的概念。
3. 线性相关的概念。
4. 向量空间的基和维度。

正交和投影



正交和投影

1. 正交的概念：内积为 0。
2. 向量空间的正交、正交补。
3. 投影，最小二乘法-求 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最佳近似解。
4. 标准正交基和 Gram–Schmidt 正交化，正交矩阵 (QR 分解)。

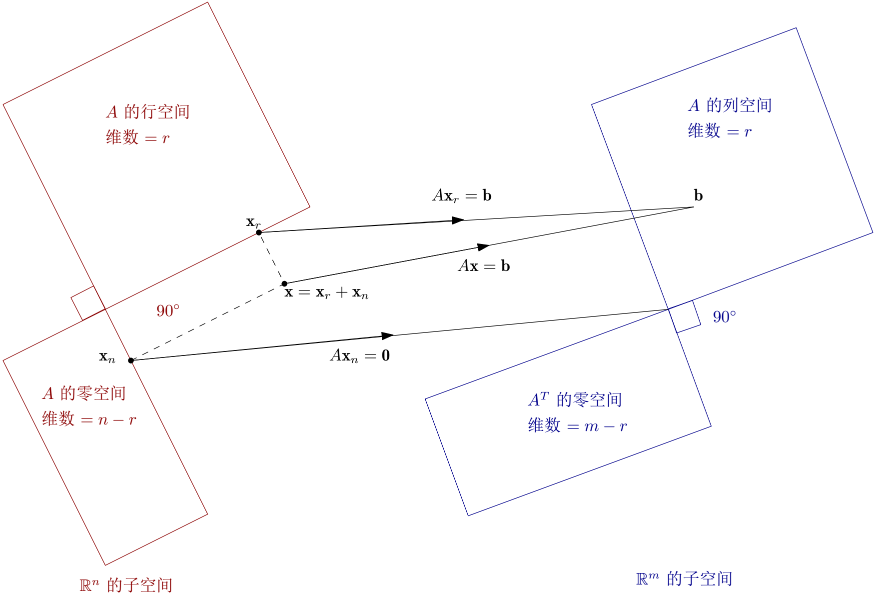
定理 1 [Fundamental Theorem of Linear Algebra].

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵并且 $\operatorname{rank}(A) = r$，则:

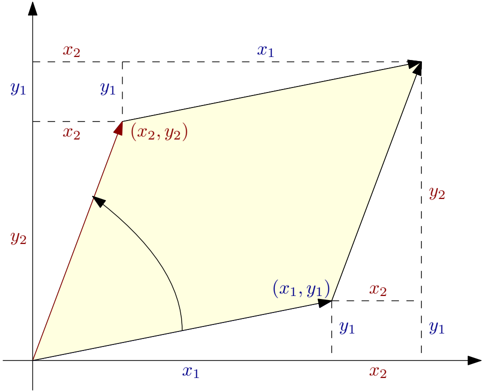
1. $\dim(\mathbf{C}(A)) = \dim(\mathbf{C}(A^\top)) = r$.
2. $\dim(\mathbf{N}(A)) = n - r$, $\dim(\mathbf{N}(A^\top)) = m - r$。
3. $\mathbf{N}(A) = (\mathbf{C}(A^\top))^\perp$.
4. $\mathbf{N}(A^\top) = (\mathbf{C}(A))^\perp$。

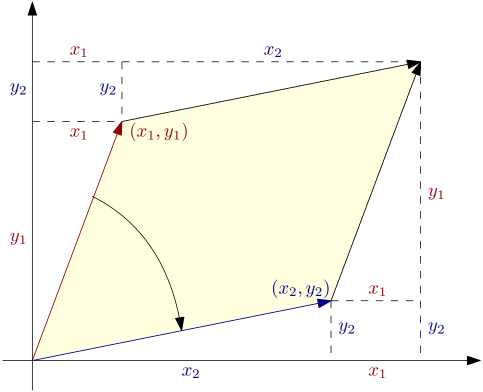
线性代数基本定理-图示

$m \times n$ 的矩阵 A 的四个空间



行列式 (I)





行列式的目标

令 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$是由 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

1. 行列式的计算-利用初等变换。
2. 行列式跟首元的关系：

$$\det(A)=\det(U)=p_1p_2\cdots p_n \text{ 或者 } \det(A)=-\det(U)=-p_1p_2\cdots p_n$$

3. 行列式的正式定义，The Big Formula:

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

4. 代数余子式，行列式按行 (列) 展开：

$$\det(A)=a_{1i}C_{1i}+\cdots+a_{1i}C_{1i}$$

5. 一个应用：Cramer's Rule，用行列式解方程，求矩阵的逆，伴随矩阵。

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ 和非零 } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \implies A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

特征值和特征向量

1. 特征值和特征向量的概念。
2. 矩阵的对角化。
3. 实对称矩阵的特征值、特征向量，对角化。
4. 正定矩阵。

还有更多 . . .

- 特征空间、代数重数、几何重数。
- 线性变换的概念、线性变换的矩阵形式、线性变换的像与核，对偶性。
- 奇异值分解 (Singular Value Decomposition).
- . . .

课程目标

1. 从强调计算（算术）到理解数学结构的转变。
2. 从牢记结论到掌握证明的转变。
3. 建立抽象的几何直观。

考试内容

考试概况

上海师范大学 Shanghai Normal University

考试安排 (**以系统显示为准。**)

- 考试地点: **3 教 212(计算机师范), 3 教 208 和 3 教 202(电子信息)**
- 考试时间: **2024 年 6 月 21 日 (周五) 8:30-10:00**, 共 90 分钟。

试卷构成

试卷 = 8 分选择题 +16 分选择题 +50 分综合题 +26 分证明题

- 选择题一共 4 道, 每道 2 分, 共 8 分。
- 填空题一共 4 道, 每道 4 分, 共 16 分。
- 综合题一共 5 道, 每道 10 分, 共 50 分。
- 综合题一共 3 道, 第 1 道 8 分, 第 2, 3 道 9 分, 共 26 分。

问题 2.

1. 令 A, B 是两个 n 阶矩阵，则下列等式正确的是 (　)

   (A) $|A|+|B|=|A+B|$　(B) $|AB|=|BA|$

   (C) $AB=BA$　(D) $|A-B|=|B-A|$

2. 下列条件中，哪个可作为 n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件? (　)

   (A) A 有 n 个不同的特征值。　(B) A 有 n 个不同的特征向量。

   (C) A 的行列式不为 0。　(D) A 是实对称矩阵。

3. 给定向量空间 $\mathbb{V}$，并且 $\dim(\mathbb{V})=n$，则下列说法错误的是 (　)

   (A) $\mathbb{V}$ 中不存在 $n+1$ 个线性无关的元素。

   (B) $\mathbb{V}$ 中存在 n 个两两正交的非零元素。

   (C) $\mathbb{V}$ 中存在 $n+1$ 个线性无关的元素。

   (D) $\mathbb{V}$ 的一组基有 n 个元素。

解 3.

1. B　2. B　3. C

问题 4.

1. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1} =$______.
2. 给定向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，则其夹角的余弦 $\cos(\theta)$ 为______.
3. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} B$，$B$ 是一个 $2 \times q$ 的矩阵，则 $\mathbf{C}(A)$ 的一组基为：______.

解 5.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 2. $\frac{5}{6}$, 3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

问题 6.

我们考虑如下的方程组：$Ax = b$，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix}, \quad \text{即：} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = b_3 \end{cases}$$

给出 $C(A)$ 和 $N(A)$ 的一组基, 并当 $b = (0, 6, -6)$ 的时候给出方程组的通解。

分析

处理方程组的时候，先通过初等变换将其变换成行阶梯形或者行最简形：

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} R & d \end{bmatrix}$$

- 首元的个数就是矩阵 A 的秩，也就是列空间 $C(A)$ 的维数。
- 自由变元的个数就是零空间 A 的维数，可以利用自由变元构造 $N(A)$ 的一组基。
- 初等行变换会改变列空间，但不会改变行空间和零空间。
- $Ax = b$ 的解可以表示成如下的形式：$x_p + x_n$(特解 + 零解).

解 7.

对其作初等变换可得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & -6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中有两个首元 x_1，x_3，自由变元也是两个 x_2，x_4。因此:

- 列空间的维数为 2，一组基为 $(1,2,3)$，$(3,8,7)$.
- 零空间的维数为 2，一组基为 $(-2,1,0,0)$，$(-2,0,-1,1)$，从而 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解可以表示为:

$$\mathbf{x}_n = c_1(-2,1,0,0) + c_2(-2,0,-1,1)$$

- 方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一组特解为 $\mathbf{x}_p = (-9,0,3,0)$，即 $\mathbf{b}=(0,6,-6)$ 的时候给出方程组的通解为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

问题 8.

请计算 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 到对应空间 $\mathbb{V}$ 上的投影，这里 $\mathbb{V}$ 用矩阵 A 的列空间表示:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

分析

- 当 A 是列满秩的矩阵时，投影 $\mathbf{p} = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$，否则需要先找出 $\mathbf{C}(A)$ 中的一组基。
- 当 A 的列向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k$ 两两正交时计算到 $\mathbf{C}(A)$ 上的投影可以表示为到各条线 $\mathbf{a}_i$ 的投影之和:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}_1^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}}\mathbf{a}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{a}_k^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_k^T\mathbf{a}}\mathbf{a}_k$$

解 9.

令矩阵 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \cdots$，则

(1) $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}_1^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}}\mathbf{a}_1 = \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

(2) 注意到：

$$A^TA = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

从而其投影：

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 4\end{bmatrix}$$

说明

注意到 $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)$ 和 $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 1)$ 是正交的，从而第二问我们也可以如下计算：

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}_1^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{a}_2^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_2^T\mathbf{a}}\mathbf{a}_2 = \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 4\end{bmatrix}$$

问题 10.

给定 $m \times n$ 的矩阵 A，证明 $\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A)$.

证明. 由线性代数基本定理我们有：

$$\text{rank}(A^TA) + \dim(\mathbf{N}(A^{\top}A)) = n = \text{rank}(A) + \dim(\mathbf{N}(A))$$

从而我们只需证明：

$$\dim(\mathbf{N}(A^{\top}A)) = \dim(\mathbf{N}(A))$$

- 任取 $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(A)$，即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，从而有：

$$A^{\top}A\mathbf{x} = A^{\top}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

  即$\mathbf{N}(A) \subseteq \mathbf{N}(A^{\top}A)$。
- 任取 $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(A^{\top}A)$，即 $A^{\top}A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，从而有：

$$\mathbf{x}^{\top}A^{\top}A\mathbf{x} = 0 \implies \|A\mathbf{x}\| = 0 \implies A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  即$\mathbf{N}(A^{\top}A) \subseteq \mathbf{N}(A)$。

$\square$

问题 11.

假设 $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，A 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵，证明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

证明. 我们先证明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 是线性无关的，假设存在 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

由矩阵的运算法则可知:

$$A(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

将 $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ 记为 $\mathbf{v}$。注意到 A 是可逆的，所以 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$，从而由于 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是线性无关的，所以 $c_1 = \ldots = c_n = 0$，所以 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 是线性无关的。
其次我们证明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 生成 $\mathbb{R}^n$，即对于任意 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，存在 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$\mathbf{u} = c_1 A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n A\mathbf{v}_n$$

这只要注意到 A 是可逆的，从而:

$$A^{-1}\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，所以对于任意 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，都会存在相应的 $c_1, \ldots, c_n$。 $\square$

关于考试

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 我尽量避免了繁琐的计算和证明技巧。
- 更多的是考察大家对基础概念的理解。
- 希望大家具备最基础的证明的意识和建立一些关于线性代数的几何直观。

课程反馈

- 我设计了一个课程反馈问卷，希望同学们都可以发表一下自己的意见和建议，谢谢。
- 问卷地址：https://www.wjx.cn/vm/rQggcUK.aspx
- 反馈问卷的二维码：

祝大家考试顺利！ 谢谢聆听！