

《线性代数》

3-矩阵 (Matrices)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024年3月7日

引理 1.

矩阵加法和数乘满足：

1. 交换律 (Commutative Law): $A + B = B + A$
2. 分配律 (Distributive Law): $c(A + B) = cA + cB$
3. 结合律 (Associative Law): $(A + B) + C = A + (B + C)$

引理 2.

矩阵乘法满足：

1. 结合律 (不需要括号): $(AB)C = A(BC)$
2. 分配律 (左分配律): $(A + B)C = AC + BC$
3. 分配律 (右分配律): $A(B + C) = AB + AC$
4. 交换律不成立：一般情况下 $AB \neq BA$

$$1. AB(i, j) = (\mathbf{a}_{i1}, \dots, \mathbf{a}_{in}) \cdot (\mathbf{b}_{1j}, \dots, \mathbf{b}_{nj}) = \mathbf{a}_{i1}\mathbf{b}_{1j} + \mathbf{a}_{i2}\mathbf{b}_{2j} + \dots + \mathbf{a}_{in}\mathbf{b}_{nj} = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_{ik}\mathbf{b}_{kj}.$$

$$2. AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_p \end{bmatrix}$$

$$3. AB = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$$

$$4. AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- › 分块矩阵
- › 逆矩阵
- › 转置矩阵和置换矩阵

- 第 2 章 2.3, 2.5

分块矩阵

我们在乘法中已经展示了矩阵的分块视角:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix} \text{ 和 } AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$$

一般来说, 我们可以将矩阵分块为若干个子矩阵, 比如:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

其中每个 A_{ij} 是一个 $m_j \times n_j$ 的矩阵。

例 3.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

如果对应的矩阵满足乘法的要求，那么分块矩阵的乘法也可以转换为对应块矩阵的乘法：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

- 上述成立的要求在于 A_{ij} 的列数等于 B_{jk} 的行数。

一个例子：矩阵乘法的第四种视角

将 A 写成列向量的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

将 B 写成行向量的形式：

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

另一个例子：消元的分块 (I)

回顾之前的消元矩阵，比如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 2 & x & x \\ 5 & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 0 & y & y \\ 5 & x & x \end{bmatrix}$$

可以将其看成：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 2 & x & x \\ 5 & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1] [1] + [0 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & [1] \begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix} + [0 \ 0] \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \\ [-2] [1] + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & [-2] \begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix} + [1 \ 0] \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \\ [0] [1] + [0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & [0] \begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix} + [0 \ 1] \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

一般来说，我们有：

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

补充说明

上述的 $D - CA^{-1}B$ 被称作矩阵 A 的舒尔补 (Schur complement)，其在图像处理、优化等领域有着重要的应用。

► 逆矩阵

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b$$

其解:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \quad \text{即:} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A^{-1}b$$

A, A^{-1} 满足:

$$(AA^{-1})x = A(A^{-1}b) = Ax = b = Ib$$

$$(A^{-1}A)b = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b = x = Ix$$

定义 4

[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].

称一个方阵 A (A 是一个 $n \times n$ 的矩阵) 是可逆的 (invertible), 如果存在一个矩阵 A^{-1} , 使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

例 5.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 是可逆的, 其逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 是不可逆的。

对角矩阵 (Diagonal Matrix):

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

是可逆的 ($d_1, \dots, d_n \neq 0$), 其逆矩阵也是对角矩阵:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

给定一个 2×2 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

其是否是可逆的? 是的话其逆矩阵是多少?

引理 6.

矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是可逆的当且仅当 $ad - bc \neq 0$, 此时其逆矩阵为:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

消元矩阵 E_{ij} 的逆矩阵 (I)

我们再来看消元矩阵 E_{ij} :

$$\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 行} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \end{array}$$

第 j 列

其逆矩阵是什么?

消元矩阵 E_{ij} 的逆矩阵 (II)

$E_{ij}A$ 得到将第 j 列的 $-k$ 倍加到第 i 列的结果, 因此 E_{ij}^{-1} 就是将第 i 列的 k 倍加到第 j 列的结果:

$$E_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

引理 7.

如果方阵 A 是可逆的, 那么其逆矩阵是唯一的。

证明. 反设存在 B, C 使得 $BA = AC = I$, 则注意到:

$$B(AC) = (BA)C = IC = C$$

$$B(AC) = BI = B$$

从而 $B = C$.



引理 8.

如果方阵 A 是可逆的, 则对于任意的 b , 方程 $Ax = b$ 有唯一解。

证明. 假设 A 是可逆的, 令其逆矩阵为 A^{-1} , 则:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

□

推论 9.

如果 $Ax = \mathbf{0}$ 存在一个非零解, 那么 A 不是可逆的。

引理 10.

如果 A 和 B 是可逆的, 那么 AB 也是可逆的, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明. 注意到:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

□

推论 11.

如果 A_1, A_2, \dots, A_n 都是可逆的, 那么 $A_1A_2 \cdots A_n$ 也是可逆的, 且其逆矩阵为:

$$(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

我们再来看个例子:

定义 12

[对角主导矩阵 (Diagonally Dominant Matrix)].

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称 A 是**对角主导的**, 如果对于每一个 $i \in [n]$, 有:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

定理 13.

如果 A 是对角主导的, 那么 A 是可逆的。

证明. 反设 A 是不可逆的, 则:

$$Ax = 0$$

存在非零解 (x_1, \dots, x_n) 。令 $x_i \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \in [n]} |x_j| > 0$, 则有:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

但是:

$$|a_{ii}||x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_i| = |x_i| \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < |a_{ii}||x_i|$$

□



- 分块矩阵。
- 可逆矩阵。
 - 可逆矩阵的定义，性质。
 - 一些可逆矩阵的例子。

实际上，我们还有许多问题没有解决，比如：

- 如果 $AB = I$ 是否就能说明 A 是可逆的？
- 如何求 A^{-1} ？
- ...

我们将在之后的课程中逐一解决这些问题。

一个前瞻性的视角，事实上存在非常多的可逆矩阵刻画，比如：

1. A 的行列式不为 0。
2. A 的秩等于 n 。
3. A 的列向量线性无关。
4. A 的列向量张成 \mathbb{R}^n 。
5. A 的行向量线性无关。
6. A 的行向量张成 \mathbb{R}^n 。
7. $Ax = \mathbf{0}$ 只有一个解 $x = \mathbf{0}$ 。
8. $Ax = b$ 有唯一解 $x = A^{-1}b$ 。
9. A 有 n 个首元。
10. A 的所有特征值非零。
11. ...

我们将在后续的课程——刻画这些性质。

转置矩阵和置换矩阵

我们看到在矩阵中行和列扮演了不同的角色。我们定义一个新的矩阵：

定义 14

[转置矩阵 (Transpose Matrix)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵，其满足：

$$(A^T)(i, j) = A(j, i)$$

例 15.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{的转置矩阵为} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$



引理 16.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(cA)^T = cA^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

理解 $(AB)^T = B^T A^T$

Ax 是 A 中列向量的线性组合，而 $x^T A^T$ 则是 A^T 中行向量的线性组合；两者恰好是一致的。

定义 17

[对称矩阵 (Symmetric Matrix)].

$n \times n$ 的矩阵 S 是对称的, 如果其满足:

$$S^T = S$$

或者说对于任意的 $i, j \in [n]$, 有 $S(i, j) = S(j, i)$.

例 18.

• $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵。

引理 19.

1. 若 A 是一个可逆的对称矩阵, 那么 A^{-1} 也是对称矩阵。
2. 对任何矩阵 A (不需要是方阵), $A^T A$ 和 AA^T 都是对称矩阵。

证明.

1. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.
2. $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$.

□

我们已经介绍了点乘（内积） \cdot 的概念，其也可以由转置矩阵来表示：

引理 20.

- 令 x, y 是两个 $n \times 1$ 的矩阵，则：

$$x^T y = x \cdot y$$

- 令 x 是 $n \times 1$ 的矩阵， y 是 $m \times 1$ 的矩阵 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则：

$$Ax \cdot y = x \cdot A^T y$$

说明

假设 x, y 是 $n \times 1$ 的矩阵（列向量），则：

- $x^T y$ 是一个值。
- xy^T 是一个矩阵。

置换矩阵 (Permutation Matrix)(I)

我们再来看置换矩阵 P_{ij} :

$$\begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

其将第 i 行和第 j 行进行了交换，如果我们任意交换行的顺序那？

定义 21.

置换矩阵 P 是将单位矩阵 I 的行重排列得到的矩阵。

例 22.

所有 3×3 的置换矩阵都可以由之前提到的 P_{ij} 得到:

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & P_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & P_{32}P_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & P_{32} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & P_{21}P_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

事实 23.

$n \times n$ 的置换矩阵一共有 $n!$ 个。

引理 24.

$$P^{-1} = P^T.$$

证明. 首先可以发现对于任意的矩阵 P_{ij} , 有: $P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^T$. 注意到对于任意的置换矩阵 P , 其可以被表述为:

$$P = P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k}$$

从而:

$$\begin{aligned} P^T &= (P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k})^T = P_{i_k j_k}^T P_{i_{k-1} j_{k-1}}^T \cdots P_{i_1 j_1}^T = P_{i_k j_k} P_{i_{k-1} j_{k-1}} \cdots P_{i_1 j_1} \\ P^{-1} &= (P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k})^{-1} = P_{i_k j_k}^{-1} P_{i_{k-1} j_{k-1}}^{-1} \cdots P_{i_1 j_1}^{-1} = P_{i_k j_k} P_{i_{k-1} j_{k-1}} \cdots P_{i_1 j_1} \end{aligned}$$

因此:

$$P^T = P^{-1}$$

□



- 转置矩阵和对称矩阵。
- 置换矩阵及其逆矩阵。