《线性代数》

4-向量空间 (Vector Space)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 3 月 6 日

定义 1 **[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].**

称一个方阵 A(A 是一个 $n \times n$ 的矩阵)是可逆的 (invertbile)，如果存在一个矩阵 A^{-1}，使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

引理 2.

如果方阵 A 是可逆的，那么其逆矩阵是唯一的。

引理 3.

如果方阵 A 是可逆的，则对于任意的 b，方程 $Ax = b$ 有唯一解。

推论 4.

如果 $Ax = \mathbf{0}$ 存在一个非零解，那么 A 不是可逆的。

定义 5 **[转置矩阵 (Tranpose Matrix)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵，其满足：

$$(A^T)(i,j) = A_(j,i)$$

定义 6.

置换矩阵 P 是将单位矩阵 I 的行重排列得到的矩阵。

引理 7.

$P^{-1} = P^T$.

主要内容

- 向量空间

- 子空间

教材参考章节

Shanghai Normal University

- 第 6 章 6.1

向量空间

特殊的向量空间

定义 8.

空间 $\mathbb{R}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 v:

$$\mathrm{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{R}$，这里的 $\mathbb{R}$ 是实数集。

定义 9.

空间 $\mathbb{C}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 v:

$$\mathrm{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{C}$，这里的 $\mathbb{C}$ 是复数集。

向量空间的形式化定义 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $u, v \in V$，$u + v \in V$。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $u \in V$ 和任意的实数 $c \in \mathbb{R}$，$cu \in V$。

向量空间的形式化定义 (II)

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + \mathrm{u}$$

2. 加法满足结合律:

$$\mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = (\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w}$$

3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0}$，其满足 $\mathrm{u} + \mathbf{0} = \mathrm{u}$ 对任意的 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$，存在一个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$，使得 $\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathbf{0}$，特别的，将 v 记为 $-\mathrm{u}$。

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1，使得 $1\mathrm{u} = \mathrm{u}$ 对于任意的 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$。
6. 数乘满足结合律:
$$\mathrm{c}_1(\mathrm{c}_2\mathrm{u}) = (\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2)\mathrm{u}$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 均有:
$$\mathrm{c}(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = \mathrm{c}\mathrm{u} + \mathrm{c}\mathrm{v}$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$ 均有:
$$(\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2)\mathrm{u} = \mathrm{c}_1\mathrm{u} + \mathrm{c}_2\mathrm{u}$$

例子–矩阵组成的向量空间 (I)

对于 $m, n \geqslant 1$，令$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$表示所有的 $m \times n$ 的实数矩阵的集合:

- 其中的加法就定义成矩阵的加法。
- 其中的数乘就定义成矩阵的数乘。

可以验证，$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$是一个向量空间。

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{0}_{m\times n}$, 即所有的入口都是 0。
- 对于任意的 $M \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$，其负元 $-M$ 为：$-M = (-1)M$.
- 数乘的单位元就是 $1 \in \mathbb{R}$.
- 数乘满足结合律和分配律。
- 数乘满足线性性质。

例子-只有一个向量的向量空间

有没有只有一个向量的向量空间呢?

- 有。

只有一个元素的向量空间

$$\mathsf{Z} = \{\mathbf{0}\}$$

是一个向量空间。可以认为 $\mathbb{R}^0$ 是 Z 的一个特殊情况。

例子 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots$

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 $\mathbb{R}^n$ 是一个向量空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 $\mathbb{R}^2$。
- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 组成的集合 $\mathbb{R}^3$。
- $\cdots$

问题 10.

能否将 $\mathbb{R}^n$ 中推广到 $\mathbb{R}^\infty$ 中?

例子-$\mathbb{R}^\infty$(I)

假设我们遵循着 $\mathbb{R}^n$ 的例子推广，则 $\mathbb{R}^\infty$ 应该是这样的：

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid$ 对所有的 $i, x_i \in \mathbb{R}\}$。
- $c(x_1, x_2, \cdots) = (cx_1, cx_2, \cdots)$。
- $(x_1, x_2, \cdots) + (y_1, y_2, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$。

但问题是：

$$(x_1, x_2, \cdots)$$

是什么？ 函数！

例子-$\mathbb{R}^\infty$(II)

定义集合F:

$$F = F(\mathbb{N} \to R) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

- 给定 $f_1, f_2 \in F$，定义函数 $f_1 + f_2 : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义函数 $cf : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

可以验证，F是一个向量空间。

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in V$，定义加法运算$\oplus$：$x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$。
- 对于任意的 $x \in V$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义数乘运算$\otimes$：$c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$。

可以验证，V 是一个向量空间。

引理 11.

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明. 反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$，则有:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$

□

引理 12.

对于任何向量 v，其负向量是唯一的。

证明. 反设存在两个负向量 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$，则有:

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_1 + \mathbf{0} = \mathrm{v}_1 + (\mathrm{v} + \mathrm{v}_2) = (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}) + \mathrm{v}_2 = \mathbf{0} + \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_2$$

□

引理 13 **[向量的消去律 (Cancellation Law)].**

如果 $\mathrm{u}+\mathrm{v}=\mathrm{u}+\mathrm{w}$，则 $\mathrm{v}=\mathrm{w}$。

引理 14.

1. $0\mathrm{v}=\mathbf{0}$。
2. $\mathrm{c}\mathbf{0}=\mathbf{0}$。
3. $(-1)\mathrm{v}=-\mathrm{v}$。
4. $-(\mathrm{u}+\mathrm{v})=(-\mathrm{u})+(-\mathrm{v})$.
5. $\mathrm{c}(-\mathrm{u})=(-\mathrm{c})\mathrm{u}=-(\mathrm{cu})$.

阶段总结

- 向量空间的概念。一些例子。
- 向量空间的性质。

接下来我们来关注向量空间的一类特殊子集。

子空间

$\mathbb{R}^2$ 中的例子

让我们从一个简单的例子看起。考察 $\mathbb{R}^2$ 中的子集:

- $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 也是一个向量空间。
- $L_2 = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 不是一个向量空间。

显然并不是所有的子集都是向量空间。我们称这样的子集为子空间。

定义 15 **[子空间 (Subspace)].**

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件:

1. 对于任意的 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in W$，$\mathrm{u}+\mathrm{v} \in W$。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{u} \in W$，$c\mathrm{u} \in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

定理 16.

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间，则 W 对于 V 上定义的加法和数乘运算构成一个向量空间。

子空间的例子 (I)

考察如下集合：

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

则 W 是 V 的一个子空间，原因在于：

- 对于任意的 $u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in W$，$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$。
- 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u = (x, y, 0) \in W$，$cu = (cx, cy, 0) \in W$。

定义对角矩阵为:

定义 17 **[对角矩阵 (Diagonal Matrix)].**

令 $n \geqslant 1$，$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$，如果对于任意的 $i \neq j$ 均有:

$$A(i,j) = 0$$

则称 A 是一个对角矩阵。

考虑如下集合:

$$D_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A\text{是对角矩阵。}\}$$

则 $D_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的一个子空间。

引理 18.

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间，则 $\mathbf{0} \in W$.

证明. 取 $\mathrm{w} \in W$， $0\mathrm{w} = \mathbf{0} \in W$. $\square$

引理 19.

令 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in W$，则所有 u, v 的线性组合 $\mathrm{cu} + \mathrm{dv}$ 均在 W 中。

证明. 由子空间的定义，对于任意的 $\mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$，均有：

$$\mathrm{cu}, \mathrm{dv} \in W$$

从而：

$$\mathrm{cu} + \mathrm{dv} \in W$$

$\square$

引理 20.

令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当：对于任意的 $k \geqslant 0$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $v_1, \ldots, v_k \in W$ 均有：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in W$$

特别的，当 $k = 0$ 时我们令上述和为 $\mathbf{0}$.

下一步

让我们回到矩阵里看看矩阵里的向量空间。

定义 21 **[列空间 (Column Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其列空间 $C(A)$ 为:

$$C(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

即 $C(A)$ 是所有由 A 的列向量线性组合而成的集合。

定理 22.

列空间 $C(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。

列空间与解的关系

引理 23.

$Ax = b$ 有解当且仅当 $b \in C(A)$。

我们可以利用转置矩阵来定义 A 的行空间。

定义 24 **[行空间 (Row Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其行空间为矩阵 A^T 的列空间 $C(A^T)$。

引理 25.

矩阵 A 的行空间 $C(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

定义 26 **[零空间 (Null Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其零空间 $N(A)$ 为:

$$N(A) = \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

即 $N(A)$ 是所有满足 $Ax = \mathbf{0}$ 的 x 的集合。

定理 27.

零空间 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

生成一个子空间 (I)

令 $S \subseteq V$，显然我们知道:

- S 不一定是一个子空间。
- S 可能为空。

如何取构造一个包含 S 的子空间?

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \mid k \geqslant 0,\ c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R},\ v_1, \ldots, v_k \in S\}$$

生成一个子空间 (II)

定理 28.

令 $S \subseteq V$，则 $\mathrm{span}(S)$ 是 V 的包含 S 的最小子空间，即:

1. $\mathrm{span}(S)$ 是 V 的子空间。
2. 令 $W \subseteq V$ 是一个 V 的子空间，且 $S \subseteq W$，则 $\mathrm{span}(S) \subseteq W$。

阶段总结

- 子空间的概念、例子以及性质。
- 矩阵的列空间和零空间。
- 生成一个子空间。