《线性代数》

5-相关性、基和维度 (Independence, Basis and Dimension)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 3 月 17 日

复习-向量空间 (I)

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $u, v \in V$，$u + v \in V$。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $u \in V$ 和任意的实数 $c \in \mathbb{R}$，$cu \in V$。

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:
$$u + v = v + u$$
2. 加法满足结合律:
$$u + (v + w) = (u + v) + w$$
3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0}$，其满足 $u + \mathbf{0} = u$ 对任意的 $u \in V$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $u \in V$，存在一个 $v \in V$，使得 $u + v = \mathbf{0}$，特别的，将 v 记为 $-u$。

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1，使得 $1\mathrm{u} = \mathrm{u}$ 对于任意的 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$。
6. 数乘满足结合律:
$$\mathrm{c}_1(\mathrm{c}_2\mathrm{u}) = (\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2)\mathrm{u}$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 均有:
$$\mathrm{c}(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = \mathrm{cu} + \mathrm{cv}$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$ 均有:
$$(\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2)\mathrm{u} = \mathrm{c}_1\mathrm{u} + \mathrm{c}_2\mathrm{u}$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 1 **[子空间 (Subspace)].**

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $u, v \in W$，$u + v \in W$。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u \in W$，$cu \in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

引理 2.

令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当：对于任意的 $k \geqslant 0$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $v_1, \ldots, v_k \in W$ 均有：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in W$$

特别的，当 $k = 0$ 时我们令上述和为 **0**.

给定向量空间 V 和其子集 $S \subseteq V$，定义:

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \mid k \geqslant 0,\ c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R},\ v_1, \ldots, v_k \in S\}$$

则:

定理 3.

令 $S \subseteq V$，则 $\mathrm{span}(S)$ 是 V 的包含 S 的最小子空间，即:

1. $\mathrm{span}(S)$ 是 V 的子空间。
2. 令 $W \subseteq V$ 是一个 V 的子空间，且 $S \subseteq W$，则 $\mathrm{span}(S) \subseteq W$。

现在考虑向量空间 $\mathbb{R}^3$:

- 令 $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$，则 $span(S)$ 是什么?
- 令 $S=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$，则 $span(S)$ 是什么?
- 令 $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$，则 $span(S)$ 是什么?
- 令 $S=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$，则 $span(S)$ 是什么?

子空间的生成 (I)

一个子空间究竟需要多少个向量生成?

主要内容

- 线性相关性

- 向量空间的基和维度

教材参考章节

- 第 6 章 6.2

线性相关性

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们先来回顾以下线性组合的概念，固定一个向量空间 V。

定义 4.

令 $v_1, \ldots, v_n \in V$. $v_1, \ldots, v_n$ 的线性组合是一个具有如下形式的向量：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

其中 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$。

说明

可以看到 $\mathrm{span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$ 实际上就是 $v_1, \ldots, v_n$ 的所有线性组合的集合。

线性无关的定义

定义 5 **[线性无关 (Linearly Independent)].**

给定一个向量组 $v_1, \ldots, v_n$。如果对于任意的 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$，当且仅当 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 时有：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \mathbf{0}$$

则称 $v_1, \ldots, v_n$ 是线性无关的。

例 6.

- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 是线性无关的。
- $\{(1,0,0),(1,1,0)\}$ 是线性无关的。
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ 不是线性无关的。

更多的例子

- 单个向量是线性无关的么?
- 包含 **0** 的向量组是线性无关的么?

引理 7.

线性无关的向量组的任何一个子集都是线性无关的。

我们知道，一个矩阵方程 Ax 可以看成是其列向量 $a_1, \ldots, a_n$ 的线性组合，所以我们有：

引理 8.

给定一个矩阵 A，则其列向量是线性无关的当且仅当方程 $Ax = \mathbf{0}$ 只有唯一解 $x = \mathbf{0}$。

线性相关的定义

我们也可以给出线性相关的定义：

定义 9 **[线性相关 (Linearly Dependent)].**

给定一个向量组 $v_1, \ldots, v_n$。如果存在 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ 满足至少一个 $c_i \neq 0$，使得：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \mathbf{0}$$

则称 $v_1, \ldots, v_n$ 是线性相关的。

例 10.

- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ 是线性相关的。
- $\{(2,2,0),(1,1,0)\}$ 是线性相关的。
- 包含 $\mathbf{0}$ 的向量组是线性相关的。

引理 11.

$v_1, \ldots, v_n$ 是线性相关的当且仅当至少有一个 v_i 可以表示成其余向量的线性组合。

引理 12.

给定一个矩阵 A，则其列向量是线性相关的当且仅当方程 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解。

向量空间的基和维度

给定一个集合 S，回顾 $\mathrm{span}(S)$:

$$\mathrm{span}(S)=\{c_1v_1+\cdots+c_kv_k \mid k\geqslant 0,\ c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R},\ v_1,\ldots,v_k\in S\}$$

我们知道 $\mathrm{span}(S)$ 是一个向量空间，进一步的，我们称 $\mathrm{span}(S)$ 是由 S 生成的向量空间。

定义 13.

给定一个向量集合 S 和向量空间 V，如果 $V=\mathrm{span}(S)$，则称 S 生成了向量空间 V

定义 14 **[向量空间的基 (A Bssis for a Vector Space)].**

一组向量是一个向量空间的基 如果其满足:

1. 这组向量是线性无关的。
2. 这组向量生成了向量空间 V。

例 15.

1. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基。
2. $\{(1,0),(0,1)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的基。
3. $\{(1,0),(2,4)\}$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的基。

一些更多的例子

Shanghai Normal University

例 16.

1. $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ 的基是什么?
2. $Z = \{\mathbf{0}\}$ 的基是什么?
3. 考虑之前提到的向量空间:

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

其中的加法和数乘运算定义为:

$$x \oplus y = x \times y,\ c \otimes x = x^c$$

V 的基是什么?

我们现在来定义向量空间的维度，直观上来讲，向量空间的维度就是需要多少个向量才能生成这个向量空间。

定义 17 **[维度 (Dimension)].**

给定一个向量空间 V，其维度，记作 $\dim(V)$，是指 V 的一个基中的向量个数。

问题 18.

上述定义会不会产生问题?

显然只有 V 中所有基的向量个数都相同时，上述定义才是合理的。

上海师范大学 Shanghai Normal University

引理 19 **[Steinitz Exchange Lemma].**

令 $e_1, \ldots, e_n$ 是向量空间 V 的一个基，$v_1, \ldots, v_m$ 是 V 的一个线性无关的向量组，其中 $1 \leqslant m \leqslant n$。则存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m} < n$，使得 $v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}$ 是 V 的一个基。

说明

当 $m = 0$ 时，上述引理是平凡的。

推论 20.

给定一个向量空间 V 和其上的两组基 $e_1, \ldots, e_n$ 和 $f_1, \ldots, f_m$。则 $n = m$。

推论 21.

假设 $\dim(V) = n$，并且 $v_1, \ldots, v_m \in V$ 是线性无关的，则：$m \leqslant n$.

推论 22.

假设 $\dim(V) = n$，并且 $v_1, \ldots, v_n \in V$ 是线性无关的，则 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一个基。

现在我们来证明 Steinitz 交换引理。

Shanghai Normal University 上海师范大学

Steinitz 交换引理的证明. 我们对 m 使用归纳法。

$m = 1$ 的情况:

由于 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的一个基，从而存在 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$v_1 = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$$

显然 $v_1 \neq \mathbf{0}$，从而存在 $c_i \neq 0$，因此我们有:

$$e_i = \frac{1}{c_i} v_1 - \frac{c_1}{c_i} e_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i} e_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} e_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i} e_n$$

即: $v_1, e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$ 是 V 的一组基。

Steinitz 交换引理的证明 (续). 我们还需要证明:

$$v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}$$

是线性无关的。考察如下的线性组合:

$$c_1 e_1 + \cdots + c_{i-1} e_{i-1} + c v_1 + \cdots + c_n e_n = \mathbf{0}$$

- 如果 $c = 0$，则由于 e_i 是线性无关的，从而 $c_1 = \cdots = c_{i-1} = c_{i+1} = \cdots = c_n = 0$。
- 如果 $c \neq 0$，由于 $v_1 \neq \mathbf{0}$，从而 v_1 可以由 $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$ 的线性组合表示，从而 e_i 可以由 $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$ 的线性组合表示，矛盾。

Steinitz 交换引理的证明 (续).

归纳步骤:

假设命题对于 $\leqslant m-1$ 的情况成立，对于 $=m$ 的情况，令 $v_1,\ldots,v_m$ 是线性无关的，注意到 $v_1,\ldots,v_{m-1}$ 也是线性无关的，从而由归纳假设，存在 $1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-m+1}\leqslant n$，使得:

$$v_1,\ldots,v_{m-1},e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-m+1}}$$

是 V 中的一组基。从而存在不全为 0 的 $c_1,\ldots,c_{m-1},d_1,d_2,\ldots,d_{n-m+1}$ 使得:

$$v_m=c_1v_1+\cdots+c_{m-1}v_{m-1}+d_1e_{i_1}+\cdots+d_{m-1}e_{i_{n-m+1}}$$

Steinitz 交换引理的证明 (续).

注意到存在 $l \in [n-m+1]$ 使得 $d_l \neq 0$，从而:

$$e_{i_l} = \frac{1}{d_l}v_m - \frac{c_1}{d_l}v_1 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{d_l}v_{m-1} - \frac{d_1}{d_l}e_{i_1} - \cdots - \frac{d_{l-1}}{d_l}e_{i_{l-1}} - \frac{d_{l+1}}{d_l}e_{i_{l+1}} - \cdots - \frac{d_{n-m+1}}{d_l}e_{i_{n-m+1}}$$

即: e_{i_l} 可以由 $v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{l-1}}, e_{i_{l+1}}, \dots, e_{i_{n-m+1}}$ 表示。

进一步可以验证:

$$v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{l-1}}, e_{i_{l+1}}, \dots, e_{i_{n-m+1}}$$

是 V 的一组基，即归纳步骤成立，引理得证。 □

回顾向量空间 Z:

$$\dim(Z) = \{\mathbf{0}\}$$

定理 23.

$\dim(Z) = 0$.

其中的关键在于:

$$\sum_{v \in \emptyset} v = \mathbf{0}$$

$\sum_{v\in\emptyset} v = 0$ 的原因

关键在于加法是可交换的，令 T 是一个有限的向量集，考察 T 的一个划分：

$$T = T_1 \cup T_2,\ \text{其中 } T_1, T_2 \text{ 满足：} T_1 \cap T_2 = \emptyset,\ T_1 \cup T_2 = T$$

则我们有：

$$\sum_{v\in T} v = \sum_{v\in T_1} v + \sum_{v\in T_2} v$$

显然有：

$$\sum_{v\in T} v = \sum_{v\in \emptyset} v + \sum_{v\in T} v$$

从而：

$$\sum_{v\in \emptyset} v = \sum_{v\in T} v - \sum_{v\in T} v = 0$$

无限维的向量空间 (I)

回顾之前函数构成的向量空间:

$$F = F(\mathbb{N} \to R) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

其中:

- 给定 $f_1, f_2 \in F$，定义函数 $f_1 + f_2 : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义函数 $cf : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

F 的维度是多少?

定理 24.

F 是无限维的。

事实上，对于任意的 $i \in \mathbb{N}$，定义：

$$f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x = i \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$f_0, f_1, \dots, f_n$$

是线性无关的。

有限维的向量空间

如果一个向量空间存在一个有限的基，则称这个向量空间是有限维的。

现在我们来看一下子空间的维度:

- 假设 W 是 V 的一个子空间，那么 W 的维度和 V 的维度有什么关系?

定理 25.

给定一个向量空间 V 和其子空间 W，如果 V 是有限的，则 W 也是有限的，并且:

$$\dim(W) \leqslant \dim(V)$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

令量空间 V 的维度 $\dim(V) = n$，并且其一组基为：

$$w_1, \ldots, w_n$$

我们希望从 V 中慢慢的扩展出一组基

$$v_1, \ldots, v_k$$

使得：

$$W = span(\{v_1, \ldots, v_k\})$$

子空间的维度 (III)

定理25的证明. 我们沿用上一页的记号，对 k 进行构造。初始化 $k=0$，如果：

$$W \neq \mathrm{span}(\{v_1, \ldots, v_k\}).$$

则存在 $v_{k+1} \in W \setminus \mathrm{span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$ 使得：

$$v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$$

是线性无关的。注意到 $\dim(V) = n$，从而由 Steinitz 交换引理，必然有：

$$k + 1 \leqslant n$$

从而 $\dim(W) \leqslant \dim(V)$。 □

阶段总结

- 线性相关和线性无关的概念。
- 向量空间的基，Steinitz 交换引理。
- 向量空间的维度, 子空间的维度。