线性代数 Week 1

第一次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 3 日

1. 这是一个关于线性组合的问题:

(1) 请描述下列各组向量线性组合的几何意义 (直线、平面、$\mathbb{R}^3$ 空间):

$$(a).\ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix},\qquad (b).\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix},\qquad (c).\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

(2) 给定二维向量 $\boldsymbol{u}=(2,1),\ \boldsymbol{v}=(3,4)$:

- 请给出 $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ 在平面上的具体位置。
- 请描述所有满足 $c+d=1$ 的线性组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 在平面上的图像。

解答.

(1) (a) 方向为 $(1,2,3)$ 的直线。
(b) 通过原点的平面 $4y-z=0$。
(c) 通过原点的平面 $x+y+z=0$。

(2)
- $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的中点，即 $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$。
- 满足 $c+d=1$ 的线性组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 在平面上的图像是过 $(3,4)$ 和 $(2,1)$ 的一条直线。

□

2. 这个问题是对向量长度和夹角的一些简单回顾，考察一个 4 维向量 $\boldsymbol{v}=(1,1,1,1)$。

(1) $\boldsymbol{v}$ 的长度是多少?

(2) 求与 $\boldsymbol{v}$ 两两垂直的非零向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{r}$。

解答.

(1) $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}=2$。

(2) 取 $\boldsymbol{u}=(1,-1,0,0),\boldsymbol{w}=(1,1,-2,0),\boldsymbol{r}=(1,1,1,-3)$。方法和答案都不唯一，我们这里只给出一种方法来逐步求得:

(i) 先考虑 $\boldsymbol{u}$，其满足:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0\quad\Rightarrow\quad u_1+u_2+u_3+u_4=0$$

随便选择一个答案即可，如 $\boldsymbol{u}=(1,-1,0,0)$。

(ii) 再考虑 $\boldsymbol{w}$，其满足:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\ \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0 \\ w_1 - w_2 = 0 \end{aligned}$$

随便选择一个答案即可，如 $\boldsymbol{w} = (1, 1, -2, 0)$。

(iii) 最后考虑 $\boldsymbol{r}$，其满足:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \\ r_1 - r_2 = 0 \\ r_1 + r_2 - 2r_3 = 0 \end{aligned}$$

在选择一个合适的答案，如 $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1, -3)$，这样就寻找了一组两两垂直的向量。

□

3. 请证明点积的如下性质:

- $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$.
- $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$.

解答.

- 由定义:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + \cdots + u_n(v_n + w_n) \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) + (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

- 由定义:

$$\begin{aligned} (c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} &= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2 + \cdots + (cu_n)v_n \\ &= c(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= c\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

□

4. 考虑一个如下的例子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 给出一组非零的满足上述方程的解 x_1, x_2, x_3。
- 令该矩阵的列向量为 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$，请根据线性组合的角度来解释一下上述解。

- 令该矩阵的行形成的向量为 $\boldsymbol{r}_1\left(=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right), \boldsymbol{r}_2\left(=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\right), \boldsymbol{r}_3\left(=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}\right)$，其构成一个平面，请解释为什么你给出的解 (x_1, x_2, x_3) 和该平面垂直。

解答.

- $(x_1, x_2, x_3) = (1, \frac{1}{2}, 1)$.
- 其对应的线性组合为 $\mathbf{0}$，即：$\boldsymbol{s}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{s}_3 = \mathbf{0}$。
- 由乘法定义，对其每一行 $\boldsymbol{r}_i$ 都有 $\boldsymbol{r}_i \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$，从而 (x_1, x_2, x_3) 与 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 均垂直，即和整个平面垂直。

□

5. "乘上一个矩阵 A"是线性变换。这句话的意思是指：

如果 $\boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合，那么 $A\boldsymbol{w}$ 是 $A\boldsymbol{u}$ 和 $A\boldsymbol{v}$ 的线性组合。

令 $\boldsymbol{u} = (1, 0), \boldsymbol{v} = (0, 1), \boldsymbol{w} = (5, 7)$。请给出 $A\boldsymbol{w}$ 与 $A\boldsymbol{u}$ 和 $A\boldsymbol{v}$ 的关系。

解答. 注意到 $\boldsymbol{w} = 5\boldsymbol{u} + 7\boldsymbol{v}$，所以 $A\boldsymbol{w} = 5A\boldsymbol{u} + 7A\boldsymbol{v}$。 □

注 0.1

线性变换的意义其实在于对于加法和数乘的保持，即 $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{v}$ 和 $A(c\boldsymbol{u}) = cA\boldsymbol{u}$。