线性代数 Week 1

第一次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 2 月 21 日

截止日期 2025 年 2 月 27 日晚 24 点

1. 这是一个关于线性组合的问题:

   (1) 请描述下列各组向量线性组合的几何意义 (直线、平面、$\mathbb{R}^3$ 空间):

   $$(a). \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}, \qquad (b). \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}, \qquad (c). \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

   (2) 给定二维向量 $\boldsymbol{u} = (2,1)$, $\boldsymbol{v} = (3,4)$:

   - 请给出 $\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ 在平面上的具体位置。
   - 请描述所有满足 $\mathrm{c} + \mathrm{d} = 1$ 的线性组合 $\mathrm{cu} + \mathrm{dv}$ 在平面上的图像。

2. 这个问题是对向量长度和夹角的一些简单回顾，考察一个 4 维向量 $\boldsymbol{v} = (1,1,1,1)$。

   (1) $\boldsymbol{v}$ 的长度是多少?

   (2) 求与 $\boldsymbol{v}$ 两两垂直的非零向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}$。

3. 请证明点积的如下性质:

- $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$.
- $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$.

4. 考虑一个如下的例子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 给出一组非零的满足上述方程的解 x_1, x_2, x_3。
- 令该矩阵的列向量为 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$，请根据线性组合的角度来解释一下上述解。
- 令该矩阵的行形成的向量为 $\boldsymbol{r}_1 \left(= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \boldsymbol{r}_2 \left(= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \boldsymbol{r}_3 \left(= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$，其构成一个平面，请解释为什么你给出的解 (x_1, x_2, x_3) 和该平面垂直。

5. “乘上一个矩阵 A”是线性变换。这句话的意思是指:

如果 $\boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合，那么 $A\boldsymbol{w}$ 是 $A\boldsymbol{u}$ 和 $A\boldsymbol{v}$ 的线性组合。

令 $\boldsymbol{u} = (1, 0), \boldsymbol{v} = (0, 1), \boldsymbol{w} = (5, 7)$。请给出 $A\boldsymbol{w}$ 与 $A\boldsymbol{u}$ 和 $A\boldsymbol{v}$ 的关系。