

第一次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 2 月 21 日

截止日期 2025 年 2 月 27 日晚 24 点

1. 这是一个关于线性组合的问题:

(1) 请描述下列各组向量线性组合的几何意义(直线、平面、 $\mathbb{R}^3$ 空间):

$$(a). \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad (b). \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (c). \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) 给定二维向量 $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$:

- 请给出 $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ 在平面上的具体位置。
- 请描述所有满足 $c + d = 1$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 在平面上的图像。

2. 这个问题是对向量长度和夹角的一些简单回顾, 考察一个 4 维向量 $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ 。(1) $\mathbf{v}$ 的长度是多少?(2) 求与 $\mathbf{v}$ 两两垂直的非零向量 $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{r}$ 。

3. 请证明点积的如下性质:

- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

4. 考虑一个如下的例子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 给出一组非零的满足上述方程的解 x_1, x_2, x_3 。
- 令该矩阵的列向量为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, 请根据线性组合的角度来解释一下上述解。
- 令该矩阵的行形成的向量为 $\mathbf{r}_1 \left(= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \mathbf{r}_2 \left(= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \mathbf{r}_3 \left(= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$, 其构成一个平面, 请解释为什么你给出的解 (x_1, x_2, x_3) 和该平面垂直。

5. “乘上一个矩阵 A ”是线性变换。这句话的意思是指:如果 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的线性组合, 那么 $A\mathbf{w}$ 是 $A\mathbf{u}$ 和 $A\mathbf{v}$ 的线性组合。令 $\mathbf{u} = (1, 0), \mathbf{v} = (0, 1), \mathbf{w} = (5, 7)$ 。请给出 $A\mathbf{w}$ 与 $A\mathbf{u}$ 和 $A\mathbf{v}$ 的关系。