

第十次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 5 月 17 日

1. 假设 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式值为 6, 请计算 $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式的值, 其中:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{b}_3 = 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1$$

解答. 利用行列式的性质, 我们有:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1) \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 4\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 2\mathbf{a}_2) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 2\mathbf{a}_2) + \\ &\quad \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 3\mathbf{a}_1) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1) \\ &= -4\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= -4 \cdot 6 = -24 \end{aligned}$$

□

2. 请指出下列语句的错误。

(1) 对投影矩阵 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 计算行列式有:

$$\det(P) = \det(A) \det(A^T A)^{-1} \det(A^T) = \frac{\det(A) \det(A^T)}{\det(A^T A)} = \frac{\det(A) \det(A^T)}{\det(A) \det(A^T)} = 1$$

(2) 如果 $AB = -BA$, 则我们有 $\det(A) \det(B) = -\det(B) \det(A)$, 即 $\det(A) \det(B) = 0$, 从而 A, B 两个矩阵必有一个不可逆。

解答.

(1) A^T 和 A 不一定是方阵, 从而尽管我们有:

$$\det(A^T A) = \frac{1}{\det(A^T A)^{-1}}$$

但是, 不能进一步拆分成 $\det(A) \det(A^T)$ 。

(2)

$$\det(-A) \neq -\det(A)$$

□

注 0.1

在第二问中，由于 $AB = -BA$ ，所以 A, B 一定都是方阵。所以不能利用第一问错的原因。

3. 计算下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x+y & y & x \\ x & x+y & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

解答.

(1) 注意到：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{23}{5} \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot \frac{23}{5} = 23$$

(2) 注意到：

$$\begin{bmatrix} y & x & x+y \\ x+y & y & x \\ x & x+y & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2(x+y) & x & x+y \\ 2(x+y) & y & x \\ 2(x+y) & x+y & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x+y \\ 1 & y & x \\ 1 & x+y & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y-x & -y \\ 1 & y & -x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -y \\ 1 & \frac{y}{y-x} & -x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{y}{y-x} & \frac{y^2}{y-x} - x \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y) \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & y-x-\frac{y^2}{x} \end{vmatrix} = 2(x+y)(y-x) \left(\frac{y^2}{y-x} - x \right) = 2x^3 + 2y^3$$

(3) 注意到：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & \frac{ab+1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & \frac{ab+1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ab+1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+abc+c}{ab+1} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & \frac{ab+1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ab+1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+abc+c}{ab+1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{abcd+ad+cd+ab+1}{a+abc+c} \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ab+1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+abc+c}{ab+1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{abcd+ad+cd+ab+1}{a+abc+c} \end{vmatrix} = abcd + ad + cd + ab + 1$$

□

4. 计算下列行列式, 并由 $\det(G_2), \det(G_3), \det(G_4)$ 猜测 $\det(G_n)$:

$$G_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解答. 计算可得:

$$\det(G_2) = -1, \quad \det(G_3) = 2, \quad \det(G_4) = -3$$

从而猜测 $\det(G_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$. 注意到:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

上述的第二步是将后面 $n-1$ 列都加到第一列上, 第四步是将第一列的 (-1) 倍分别加到后面的 $n-1$ 列上. 从而我们有:

$$\det(G_n) = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

□

5. 通过 Cramers' Rule 解下列两个方程组:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 & ax + by + cz &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 & dx + ey + fz &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 & gx + hy + iz &= 0 \end{aligned}$$

解答.

(1) 记:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

分别计算行列式可得:

$$\det(A) = -6, \quad \det(A_1) = 0, \quad \det(A_2) = -6, \quad \det(A_3) = 0$$

从而该方程的解为:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 0, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 1, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 0$$

(2) 记:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{bmatrix}$$

分别计算行列式可得:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh, \quad \det(A_1) = ei - fh, \quad \det(A_2) = fg - di, \quad \det(A_3) = dh - eg$$

若 $\det(A) \neq 0$ 。则该方程的解为:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{ei - fh}{aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh}, \\ y &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{fg - di}{aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh}, \\ z &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{dh - eg}{aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh} \end{aligned}$$

若 $\det(A) = 0$ 。则该方程组可能有无数解或者无解。

□