

第十次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 5 月 9 日

截止日期 2025 年 5 月 15 日晚 24 点

1. 假设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ 的行列式值为 6, 请计算 $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ 的行列式的值, 其中:

$$b_1 = a_2$$

$$b_2 = a_1 + 5a_2$$

$$b_3 = 4a_3 + 2a_2 + 3a_1$$

2. 请指出下列语句的错误。

- (1) 对投影矩阵 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 计算行列式有:

$$\det(P) = \det(A) \det(A^T A)^{-1} \det(A^T) = \frac{\det(A) \det(A^T)}{\det(A^T A)} = \frac{\det(A) \det(A^T)}{\det(A) \det(A^T)} = 1$$

- (2) 如果 $AB = -BA$, 则我们有 $\det(A) \det(B) = -\det(B) \det(A)$, 即 $\det(A) \det(B) = 0$, 从而 A, B 两个矩阵必有一个不可逆。

3. 计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x+y & y & x \\ x & x+y & y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

4. 计算下列行列式, 并由 $\det(G_2), \det(G_3), \det(G_4)$ 猜测 $\det(G_n)$:

$$G_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

5. 通过 Cramers' Rule 解下列两个方程组:

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 & & ax + by + cz = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 & , & dx + ey + fz = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 & & gx + hy + iz = 0 \end{array}$$