第十一次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 5 月 23 日

1. 定义 Hilbert 矩阵为：$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$，即 $H_n(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$，请写出 H_2, H_3 并写出其行列式的值。

注 0.1

Hilbert 矩阵是一种常见的难计算的矩阵，常用来测试算法。

解答. 写出 H_2, H_3 可得：

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

其行列式值为：

$$\det(H_2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \ \det(H_3) = \frac{1}{2160}$$

□

2. 设 A 是 n 阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，并且 $\det(A) = 2$，求矩阵 $2A^{-1} + 3A^*$ 的行列式。

解答. 注意到 $AA^* = \det(A)E$，从而：

$$|A||2A^{-1} + 3A^*| = |2E + 3|A|E| = |8E| = 8^n$$

从而：

$$|2A^{-1} + 3A^*| = \frac{8^n}{2} = 4 \cdot 8^{n-1}.$$

□

3. 分别利用 Cramer 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

解答.

- (利用 Cramer 法则) 首先计算 A 的行列式:

$$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$$

再分别计算 A 的代数余子式:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

从而 A 的逆矩阵为:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

- (初等变换) 注意到:

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

从而 A 的逆矩阵为:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

□

4. 利用 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$ 来说明，1 到 n 的所有置换中，奇偶置换的个数相等，这里奇置换是指其逆序数为奇数的置换，偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

解答. 注意到，由行列式的定义，我们有:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)}$$

当 σ 为奇置换时，$\tau(\sigma)$ 为奇数，从而 $(-1)^{\tau(\sigma)} = -1$；当 σ 为偶置换时，$\tau(\sigma)$ 为偶数，从而 $(-1)^{\tau(\sigma)} = 1$。注意到上述行列式为 0，从而奇置换和偶置换的个数相等。 □

5. 我们来考虑一下分块矩阵的行列式计算，假设 A, B, C, D 都是方阵：

(1) 证明 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$。

(2) 进一步证明 $\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$。

(3) 请分别给出例子说明 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq \det(A)\det(B) - \det(C)\det(D)$ 以及 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq \det(AB - CD)$。

注 0.2

事实上，我们可以证明，当 A 可逆并且 $AC = CA$ 时，

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = \det(AB - CD)$$

解答.

(1) 注意到

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} A & O \\ O & E \end{bmatrix}) \det(\begin{bmatrix} E & O \\ O & B \end{bmatrix})$$

下证：

$$\det(\begin{bmatrix} A & O \\ O & E \end{bmatrix}) = \det(A), \ \det(\begin{bmatrix} E & O \\ O & B \end{bmatrix}) = \det(B)$$

不妨可以假设 A, B 都是可逆矩阵，否则我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A & O \\ O & E \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} E & O \\ O & B \end{bmatrix}) = 0$$

由于 A 是可逆矩阵，从而存在一系列的初等矩阵 $E_1, \dots E_k$，使得：

$$A = E_1 \cdots E_k$$

从而我们有：

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} E_k & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

另一方面，我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} E_i & O \\ O & E \end{bmatrix}) = \det(E_i)$$

从而我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A & O \\ O & E \end{bmatrix}) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) = \det(A)$$

同理，我们有:

$$\det(\begin{bmatrix} E & O \\ O & B \end{bmatrix}) = \det(B)$$

(2) 我们用行列式的定义来证明，记 $H = \begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}$，令其第 i 行第 j 列的元素为 h_{ij}。注意到:

$$\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}$$

考察 $\prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}$，如果其存在 D 中的元素，则其也必然存在 O 中的元素，从而其必然为 0。从而我们有:

$$\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

(3) 令:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 0 - 1 = -1$$

$$\det(A)\det(B) - \det(D)\det(C) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$\det(AB - CD) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = 0$$

$\square$