第十一次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 5 月 16 日

截止日期 2025 年 5 月 22 日晚 24 点

1. 定义 Hilbert 矩阵为：$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$，即 $H_n(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$，请写出 H_2, H_3 并写出其行列式的值。

注 0.1

Hilbert 矩阵是一种常见的难计算的矩阵，常用来测试算法。

2. 设 A 是 n 阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，并且 $\det(A) = 2$，求矩阵 $2A^{-1} + 3A^*$ 的行列式。

3. 分别利用 Cramer 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 利用 $\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=0$ 来说明，1 到 n 的所有置换中，奇偶置换的个数相等，这里奇置换是指其逆序数为奇数的置换，偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

5. 我们来考虑一下分块矩阵的行列式计算，假设 A, B, C, D 都是方阵：

(1) 证明 $\begin{vmatrix}A & O\\ O & B\end{vmatrix}=\det(A)\det(B)$。

(2) 进一步证明 $\begin{vmatrix}A & D\\ O & B\end{vmatrix}=\det(A)\det(B)$。

(3) 请分别给出例子说明 $\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}\neq\det(A)\det(B)-\det(C)\det(D)$ 以及 $\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}\neq\det(AB-CD)$。

注 0.2

事实上，我们可以证明，当 A 可逆并且 $AC=CA$ 时，

$$\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=\det(AB-CD)$$