

第十一次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 5 月 16 日

截止日期 2025 年 5 月 22 日晚 24 点

1. 定义 Hilbert 矩阵为: $H_n = \left[\frac{1}{i+j-1} \right]_{n \times n}$, 即 $H_n(i, j) = \frac{1}{i+j-1}$, 请写出 H_2, H_3 并写出其行列式的值。

注 0.1

Hilbert 矩阵是一种常见的难计算的矩阵, 常用来测试算法。

2. 设 A 是 n 阶矩阵, A^* 为其伴随矩阵, 并且 $\det(A) = 2$, 求矩阵 $2A^{-1} + 3A^*$ 的行列式。
3. 分别利用 Cramer 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 利用 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$ 来说明, 1 到 n 的所有置换中, 奇偶置换的个数相等, 这里奇置换是指其逆序数为奇数的置换, 偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

5. 我们来考虑一下分块矩阵的行列式计算, 假设 A, B, C, D 都是方阵:

(1) 证明 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$ 。

(2) 进一步证明 $\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$ 。

(3) 请分别给出例子说明 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq \det(A) \det(B) - \det(C) \det(D)$ 以及 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq \det(AB - CD)$ 。

注 0.2

事实上, 我们可以证明, 当 A 可逆并且 $AC = CA$ 时,

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = \det(AB - CD)$$