第十二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 5 月 29 日

1. (1) 计算下列矩阵 A 和 A^2 的特征值和特征向量:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \; A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(2) 证明若 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，λ 是 A 的特征值，则 λ^2 是 A^2 的特征值。

解答. 首先计算 A 的特征多项式:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

从而其两个特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$。

(1) 对于 $\lambda_1 = 2$，解方程组 $(A - 2E)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_1 = 2$ 对应的特征向量。

(2) 对于 $\lambda_2 = -3$，解方程组 $(A + 3E)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为:} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_2 = -3$ 对应的特征向量。对于 A^2，同理计算其特征多项式:

$$f_{A^2}(\lambda) = \det(A^2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

从而其两个特征值为 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$。

(i) 对于 $\lambda_1 = 4$，解方程组 $(A^2 - 4E)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_1 = 4$ 对应的特征向量。

(ii) 对于 $\lambda_2 = 9$，解方程组 $(A^2 - 9E)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为:} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_2 = 9$ 对应的特征向量。

现在假设 λ 是 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量，则有：

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$$

从而 λ^2 是 A^2 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量。 □

2. 定义下列数列：

$$G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k),\ G_0 = 0,\ G_1 = 1$$

(1) 将其写成 $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$ 的矩阵形式。

(2) 求矩阵 A 的特征值和特征向量。

(3) 求 A 的对角化 $X\Lambda X^{-1}$.

(4) 证明 $\lim_{k\to\infty} G_k = \frac{2}{3}$

解答.

(1)

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$$

(2) 计算矩阵 A 的特征多项式：

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})$$

从而其两个特征值为 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$。

- 对于 $\lambda_1 = 1$，解方程组 $(A - E)x = 0$：

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为：} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  即为 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量。

- 对于 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$，解方程组 $(A + \frac{1}{2}E)x = 0$：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为：} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

  即为 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ 对应的特征向量。

(3) 由上题结论，令：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$AX = X\Lambda \text{ 即：} A = X\Lambda X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(4) 注意到：

$$A^k = X\Lambda^k X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1} \end{bmatrix}$$

以及：

$$\begin{bmatrix} G_k \\ G_{k-1} \end{bmatrix} = A^{k-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix}$$

从而：

$$G_k = (\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1})G_1 + (\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1})G_0 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1}$$

也就是：

$$\lim_{k\to\infty} G_k = \frac{2}{3}$$

□

注 0.1

非常抱歉，这里一开始不小心把初值 G_0 写成了 1，这会导致所有的 G_i 都是 1，尽管依旧可以依照上述方法解出来，但是这样会导致最后 G_k 恰好算出来是 1(在最后一个式子中，令 $G_1 = G_0 = 1$ 可计算出 $G_k = 1$)，从而导致第四问结论有问题。现在答案中改正并给出正确的版本。

3. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，计算 $\varphi(A) = A^{100} - A^{50} + 2A^3$。

解答. 将 A 对角化可得：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

从而：

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{100}-(-1)^{50}+2(-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100}-2^{50}+2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100}-2^{50}+2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100}-2^{50}+2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100}-2^{50}+2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 & L \\ 0 & L & 0 \\ -2 & -L & 4L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} (\text{记：} L = 2^{100}-2^{50}+2^4) \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{8+L}{3} & \frac{2+L}{3} & \frac{2+L}{3} \\ 0 & L & 0 \\ -\frac{8+4L}{3} & \frac{2+L}{3} & \frac{2+4L}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

4. 令 A 是 $n \times n$ 的矩阵，证明 A^T 和 A 的特征值相同。

解答. 注意到：

$$(A - \lambda E)^T = A^T - \lambda E$$

从而我们有：

$$\det(A - \lambda E) = \det((A - \lambda E)^T) = \det(A^T - \lambda E)$$

从而 A 和 A^T 的特征值相同。 □

5. 令 $A = X\Lambda X^{-1}$。对角化下列矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & 2A \end{bmatrix}$$

并给出 B 的特征值和特征向量。

解答. 注意到：

$$B = X(2\Lambda)X^{-1}$$

从而我们有：

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & O \\ O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & 2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & O \\ O & X^{-1} \end{bmatrix}$$

令 $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$，$\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，则我们有：

- B 的特征值为 $\lambda_1, 2\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 2\lambda_n$。
- 对应的特征向量为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} x_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_n \end{bmatrix}$$

□