

## 第十二次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 5 月 23 日

**截止日期** 2025 年 5 月 29 日晚 24 点

1. (1) 计算下列矩阵  $A$  和  $A^2$  的特征值和特征向量:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- (2) 证明若  $A$  是一个  $n \times n$  的矩阵,  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $\lambda^2$  是  $A^2$  的特征值。

2. 定义下列数列:

$$G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k), G_0 = 1, G_1 = 1$$

- (1) 将其写成  $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$  的矩阵形式。
- (2) 求矩阵  $A$  的特征值和特征向量。
- (3) 求  $A$  的对角化  $X\Lambda X^{-1}$ .
- (4) 证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \frac{2}{3}$

3. 给定矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 计算  $\varphi(A) = A^{100} - A^{50} + 2A^3$ 。

4. 令  $A$  是  $n \times n$  的矩阵, 证明  $A^T$  和  $A$  的特征值相同。

5. 令  $A = X\Lambda X^{-1}$ 。对角化下列矩阵:

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & 2A \end{bmatrix}$$

并给出  $B$  的特征值和特征向量。