

第二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 3 月 11 日

1. 计算下列式子:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解答. (1) 计算可得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1, 2, 4) \cdot (2, 5, 6) \\ (-2, 3, 1) \cdot (2, 5, 6) \\ (-4, 1, 2) \cdot (2, 5, 6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 17 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 13 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 计算可得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 36 & 54 \\ 5 & 17 & 22 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

(3) 计算可得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(4) 计算可得:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

□

2. 假设矩阵 $m \times n$ 的矩阵 A 可以写成如下的形式:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

即 $\mathbf{A}_i$ 是一个 $1 \times n$ 的矩阵 (行向量), $\mathbf{a}_j$ 是一个 $m \times 1$ 的矩阵 (列向量), 计算下列矩阵乘法, 结果请用 $\mathbf{A}_i$ 和 $\mathbf{a}_i$ 来表示, 选你认为可以表示清楚的方法即可.:

$$(1) \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 这里 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 是一个 } n \times n \text{ 的矩阵.}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}, \text{ 这里 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 是一个 } m \times m \text{ 的矩阵.}$$

解答. 我们有:

$$(1) \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad 2\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n]$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} A_1 + 2A_2 \\ \vdots \\ A_{m-1} + 2A_m \\ A_m \end{bmatrix}$$

□

3. 这是一个关于矩阵乘法性质的验证问题，课上讲过，矩阵的乘法是如下的定义的：

定义 0.1

假设 $m, n, p \geq 1$ 。给定 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times p$ 矩阵 B ，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

那么 AB 是形式为

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

的 $m \times p$ 矩阵，其中每个 c_{ij} 是 A 的第 i 个行向量与 B 的第 j 个列向量的内积定义：

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k \in [n]} a_{ik}b_{kj}.$$

(1) 验证其具有结合律，即 $A(BC) = (AB)C$ 。

(2) 验证我们可以通过通过如下的两种方式进行计算：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}, \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \end{bmatrix}.$$

(3) 验证我们可以通过如下的方式计算：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_n B_n.$$

注 0.2

- (1) 可以通过验证两种方式算出来的第 i 行第 j 列的元素是否相等来验证上述这些等式。
- (2) 可以看到，我们可以对矩阵进行任意的分块再计算，只需要满足乘法的形式即可，这就是**分块矩阵**的思想。
- (3) 上述习题可以说明，我们上课讲的矩阵的乘法几种方式都是等价的，使用的时候可以根据具体的情况选择合适的方式。

解答. (1) 不妨令 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times p, p \times q$ 的矩阵，则记 $D = (AB)C, E = A(BC)$, D, E 显然都是 $m \times q$ 的矩阵。从而对于任意的 $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, q\}$, 有:

$$\begin{aligned}
 D(i, j) &= \sum_{k=1}^p AB(i, k)C(k, j) \\
 &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n A(i, l)B(l, k) \right) C(k, j) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n A(i, l)B(l, k)C(k, j) \\
 E(i, j) &= \sum_{k=1}^n A(i, k)BC(k, j) \\
 &= \sum_{k=1}^n A(i, k) \left(\sum_{l=1}^p B(k, l)C(l, j) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A(i, k)B(k, l)C(l, j) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n A(i, l)B(l, k)C(k, j)
 \end{aligned}$$

即: $D(i, j) = E(i, j)$, 从而 $D = E$, 即 $(AB)C = A(BC)$.

(2) 记:

$$C = AB, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{b}_1 & \mathbf{A} \mathbf{b}_2 & \vdots & \mathbf{A} \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

显然 C, D, F 都是 $m \times p$ 的矩阵，从而对于任意的 $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, p\}$, 有:

$$\begin{aligned}
 C(i, j) &= \sum_{k=1}^n A(i, k)B(k, j) \\
 D(i, j) &= (\mathbf{a}_i B)(1, j) = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_i(k)B(k, j) = \sum_{k=1}^n A(i, k)B(k, j) \\
 F(i, j) &= \mathbf{A} \mathbf{b}_j(1, i) = \sum_{k=1}^n A(i, k) \mathbf{b}_j(k) = \sum_{k=1}^n A(i, k)B(k, j)
 \end{aligned}$$

从而 $C = D = F$,

- (3) 记矩阵 $a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_n B_n$ 为 G , 注意到对任意的 $i \in [n]$, $a_i B_i$ 都是 $m \times p$ 的矩阵, 从而 G 也是 $m \times p$ 的矩阵。又对于任意的 $k \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, p\}$, 有:

$$(a_i B_i)(k, j) = a_i(k) B_i(k, j) = A(k, i) B(i, j)$$

从而:

$$G(k, j) = \sum_{i=1}^n (a_i B_i)(k, j) = \sum_{i=1}^n A(k, i) B(i, j) = C(k, j)$$

即 $G = C$ 。

□

4. 证明 $(A + B)^2$ 和 $A^2 + 2AB + B^2$ 是不等的, 这里:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步探讨 $(A + B)(A + B)$ 究竟等于什么?

解答. 经过计算可得:

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= \begin{bmatrix} 3 & b+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & b+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4b+8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2b+8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而 $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, 事实上我们注意到:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 2b+2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法的交换律并不成立, 所以 $(A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ 。

□

5. 假设你求解方程组 $Ax = b$, 分别令 b 是如下特殊的值求得对应的解 x_1, x_2, x_3 (假设总是有解的):

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 是由 x_1, x_2, x_3 组成的矩阵, 计算 AX 。

注 0.3

事实上, 这是一种用来求 A 逆矩阵的方法, 我们将在后面的课程中讲到。

解答. 注意到

$$AX = A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & Ax_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $AX = I$ 。

□

注 0.4

事实上，假设 A 是方阵，那么 $X = A^{-1}$ ；若 A 不是方阵，那么则获得使其 $AX = I$ 的矩阵 X ，但此时需要注意的是 XA 不等于 I ，事实上 XA 甚至都不一定合法。