

## 第二次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 2 月 28 日

**截止日期** 2025 年 3 月 6 日晚 24 点

1. 计算下列式子:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 假设矩阵  $m \times n$  的矩阵  $A$  可以写成如下的形式:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

即  $\mathbf{A}_i$  是一个  $1 \times n$  的矩阵 (行向量),  $\mathbf{a}_j$  是一个  $m \times 1$  的矩阵 (列向量), 计算下列矩阵乘法, 结果请用  $\mathbf{A}_i$  和  $\mathbf{a}_i$  来表示, 选你认为可以表示清楚的方法即可。:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 这里 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 是一个 } n \times n \text{ 的矩阵。}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}, \text{ 这里 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 是一个 } m \times m \text{ 的矩阵。}$$

3. 这是一个关于矩阵乘法性质的验证问题，课上讲过，矩阵的乘法是如下的定义的：

### 定义 0.1

假设  $m, n, p \geq 1$ 。给定  $m \times n$  矩阵  $A$  和  $n \times p$  矩阵  $B$ ，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

那么  $AB$  是形式为

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

的  $m \times p$  矩阵，其中每个  $c_{ij}$  是  $A$  的第  $i$  个行向量与  $B$  的第  $j$  个列向量的内积定义：

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k \in [n]} a_{ik}b_{kj}.$$

(1) 验证其具有结合律，即  $A(BC) = (AB)C$ 。

(2) 验证我们可以通过通过如下的两种方式进行计算：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}, \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \end{bmatrix}.$$

(3) 验证我们可以通过如下的方式计算：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_n B_n.$$

### 注 0.2

(1) 可以通过验证两种方式算出来的第  $i$  行第  $j$  列的元素是否相等来验证上述这些等式。

(2) 可以看到，我们可以对矩阵进行任意的分块再计算，只需要满足乘法的形式即可，这就是**分块矩阵**的思想。

(3) 上述习题可以说明，我们上课讲的矩阵的乘法几种方式都是等价的，使用的时候可以根据具体的情况选择合适的方式。



4. 证明  $(A + B)^2$  和  $A^2 + 2AB + B^2$  是不等的, 这里:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步探讨  $(A + B)(A + B)$  究竟等于什么?

5. 假设你求解方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 分别令  $\mathbf{b}$  是如下特殊的值求得对应的解  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  (假设总是有解的):

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令  $X = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3]$  是由  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  组成的矩阵, 计算  $AX$ 。

#### 注 0.3

事实上, 这是一种用来求  $A$  逆矩阵的方法, 我们将在后面的课程中讲到。