第二次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 2 月 28 日

截止日期 2025 年 3 月 6 日晚 24 点

1. 计算下列式子:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. 假设矩阵 $m \times n$ 的矩阵 A 可以写成如下的形式:

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}_i$ 是一个 $1 \times n$ 的矩阵 (行向量), $\boldsymbol{a}_j$ 是一个 $m \times 1$ 的矩阵 (列向量), 计算下列矩阵乘法, 结果请用 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_i$ 来表示, 选你认为可以表示清楚的方法即可。:

(1) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 这里 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵。

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} A$, 这里 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一个 $m \times m$ 的矩阵。

3. 这是一个关于矩阵性质的验证问题，课上讲过，矩阵的乘法是如下的定义的:

定义 0.1

假设 $m, n, p \geqslant 1$。给定 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times p$ 矩阵 B，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad 且 \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

那么 AB 是形式为

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

的 $m \times p$ 矩阵，其中每个 c_{ij} 是 A 的第 i 个行向量与 B 的第 j 个列向量的内积定义:

$$c_{ij} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \ldots, b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k \in [n]} a_{ik}b_{kj}.$$

(1) 验证其具有结合律，即 $A(BC) = (AB)C$.

(2) 验证我们可以通过通过如下的两种方式进行计算:

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \boldsymbol{a}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{bmatrix}, \quad AB = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \vdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}.$$

(3) 验证我们可以通过如下的方式计算:

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \vdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \cdots \\ \boldsymbol{B}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{B}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{B}_n.$$

注 0.2

(1) 可以通过验证两种方式算出来的第 i 行第 j 列的元素是否相等来验证上述这些等式。

(2) 可以看到，我们可以对矩阵进行任意的分块再计算，只需要满足乘法的形式即可，这就是**分块矩阵**的思想。

4. 证明 $(A+B)^2$ 和 $A^2+2AB+B^2$ 是不等的，这里：

$$A=\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$$

进一步探讨 $(A+B)(A+B)$ 究竟等于什么？

5. 假设你求解方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，分别令 $\boldsymbol{b}$ 是如下特殊的值求得对应的解 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$（假设总是有解的）：

$$A\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

令 $X=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}$ 是由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 组成的矩阵，计算 AX。

注 0.3

事实上，这是一种用来求 A 逆矩阵的方法，我们将在后面的课程中讲到。