第三次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 14 日

1. 这个问题帮助大家再次理解结合律的作用：假设 A 是 $m\times n$ 的矩阵，B 是 $n\times p$ 的矩阵，C 是 $p\times q$ 的矩阵，我们来考察做乘法计算时乘法的执行次数，这里执行的乘法次数指的是，比如当 AB 相乘时，我们有：

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

从而对所有的 $i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,p\}$，$AB(i,j)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 共执行了 n 次乘法，从而 AB 共执行了 mnp 次乘法。

- 计算 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 分别需要多少次乘法？
- 如果 $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}<\frac{1}{m}+\frac{1}{p}$，那么哪一个计算方法更快？你也可以由这个例子看出，当多个矩阵相乘时，进行运算的顺序会影响运算的效率。
- 现在假设 u,v,w 都是 n 维列向量，请给出你计算 u^Tvw^T 的顺序并解释原因。（即 $(u^Tv)w^T$ 还是 $u^T(vw^T)$?）

解答.

(1) 注意到如果 $m\times n$ 的矩阵和 $n\times q$ 的矩阵相乘得到 $m\times q$ 的矩阵，其中每个数都要经历 n 次乘法，一共 mq 个数，所以一共需要 mnq 次乘法，从而

- 计算 BC 需要 npq 次乘法，计算 A 和 (BC) 的乘法需要 mnq 次乘法，因此计算 $A(BC)$ 一共需要 $npq+mnq$ 次乘法。
- 计算 AB 需要 mpn 次乘法，计算 (AB) 和 C 的乘法需要 mpq 次乘法，因此计算 $(AB)C$ 一共需要 $mpn+mpq$ 次乘法。

(2) 对上述不等式两边同时乘以 $mnpq$，则我们有：

$$mpq+mnp<npq+mnq$$

从而在上述条件中，$(AB)C$ 计算的乘法次数更少，从而更快。

(3) 由上述讨论可以看出：

- $(u^Tv)w^T$ 需要 $1\cdot n\cdot 1+1\cdot 1\cdot n=2n$ 次乘法。
- $u^T(vw^T)$ 需要 $1\cdot n\cdot n+n\cdot n\cdot 1=2n^2$ 次乘法。

从而 $(u^Tv)w^T$ 更快。

$\square$

2. 计算下列矩阵的乘积：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

解答. 记 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则我们有：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} O & EO + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + OO & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} O + O \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \\ 16 & 12 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

3. 判断下列语句的真假，并给出证明或反例：

- 如果矩阵 A^2 是存在的，那么 A 是一个方阵。
- 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 A 和 B 都是方阵。
- 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 AB 和 BA 都是方阵。
- 如果 $AB = B$，那么 $A = E$。

解答.

(1) 对的，因为假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则 A^2 存在意味着 $m = n$.

(2) 错的，比如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则我们有：$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) 对的，令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则由 AB, BA 都是存在的，则可得 B 是 $n \times m$ 的矩阵，从而 AB 是 $m \times m$ 的方阵，BA 是 $n \times n$ 的矩阵。

(4) 错的，考察如下的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $AB = B$，但 $A \neq E$.

$\square$

注 0.1

第 4 个例子也说明矩阵乘法是没有消去律的（无论是左或者右），即一般情况下 $AB = AC$ 并不能推出 $B = C$，但是下述的第三题说明如果 A 是一个可逆矩阵，那么 $AB = AC$ 就可以推出 $B = C$.

4. 如果 3×3 的矩阵 A 满足：

$$\text{row } 1 + \text{row } 2 = 2\text{row } 3$$

即 A 的第三行是它的前两行的和的两倍。证明 A 不是一个可逆矩阵。

hint: 想办法说明：$Ax = b$ 并不是对所有的 b 都有解。

解答. 令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，我们证明 $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 没有解。反设其方程存在一组解 (x_1, x_2, x_3)，则我们有：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 1 \end{aligned}$$

由于 A 的第三行是它的前两行的和，所以我们有：

$$\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \frac{1}{2}((a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3) \\ &= \frac{1}{2}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \frac{1}{2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

矛盾。 □

5. 假设 A, B 都是方阵，利用 $A(E + BA) = (E + AB)A$ 这一等式证明，如果 A 是一个可逆矩阵，那么 $E + AB$ 和 $E + BA$ 要么同时可逆，要么同时不可逆。

事实上，该问题并不需要 A 是可逆的这一条件，但需要其他方式去处理。

解答. 注意到：

$$\begin{aligned} E + BA &= A^{-1}(E + AB)A \\ E + AB &= A(E + BA)A^{-1} \end{aligned}$$

假设 $E + BA$ 是可逆的，则考虑矩阵 $C = A(E + BA)^{-1}A^{-1}$：

$$\begin{aligned} C(E + AB) &= A(E + BA)^{-1}A^{-1}(E + AB) = A(E + BA)^{-1}A^{-1}A(E + BA)A^{-1} = E. \\ (E + AB)C &= (E + AB)A(E + BA)^{-1}A^{-1} = A(E + BA)A^{-1}A(E + BA)^{-1}A^{-1} = E. \end{aligned}$$

从而 $E + AB$ 是可逆的。

另一方面，假设 $E + AB$ 是可逆的，则考虑矩阵 $D = A^{-1}(E + AB)^{-1}A$:

$$D(E + BA) = A^{-1}(E + AB)^{-1}A(E + BA) = A^{-1}(E + AB)^{-1}AA^{-1}(E + AB)A = E.$$
$$(E + BA)D = (E + BA)A^{-1}(E + AB)^{-1}A = A^{-1}(E + BA)AA^{-1}(E + AB)^{-1}A = E.$$

从而 $E + BA$ 是可逆的。 □

注 0.2

这里必须利用 A 是可逆的，我们才能直接这样写出 C 和 D，但事实上，上述结论不需要 A 是可逆的便可成立，只是需要其他的工具。