线性代数 Week 3

第三次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 7 日

截止日期 2025 年 3 月 13 日晚 24 点

1. 这个问题帮助大家再次理解结合律的作用：假设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times p$ 的矩阵，C 是 $p \times q$ 的矩阵，我们来考察做乘法计算时乘法的执行次数，这里执行的乘法次数指的是，比如当 AB 相乘时，我们有：

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

从而对所有的 $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, p\}$，$AB(i,j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ 共执行了 n 次乘法，从而 AB 共执行了 mnp 次乘法。

- 计算 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 分别需要多少次乘法?
- 如果 $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} < \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$，那么哪一个计算方法更快? 你也可以由这个例子看出，当多个矩阵相乘时，进行运算的顺序会影响运算的效率。
- 现在假设 u, v, w 都是 n 维列向量，请给出你计算 $u^T v w^T$ 的顺序并解释原因。(即 $(u^T v) w^T$ 还是 $u^T (v w^T)$?)

2. 计算下列矩阵的乘积：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. 判断下列语句的真假，并给出证明或反例：

- 如果矩阵 A^2 是存在的，那么 A 是一个方阵。
- 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 A 和 B 都是方阵。
- 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 AB 和 BA 都是方阵。
- 如果 $AB = B$，那么 $A = I$。

4. 如果 3×3 的矩阵 A 满足：

$$\text{row } 1 + \text{row } 2 = 2\text{row } 3$$

即 A 的第三行是它的前两行的和的两倍。证明 A 不是一个可逆矩阵。

hint: 想办法说明：$Ax = b$ 并不是对所有的 b 都有解。

5. 假设 A, B 都是方阵，利用 $A(I + BA) = (I + AB)A$ 这一等式证明，如果 A 是一个可逆矩阵，那么 $I + AB$ 和 $I + BA$ 要么同时可逆，要么同时不可逆。

事实上，该问题并不需要 A 是可逆的这一条件，但需要其他方式去处理。