线性代数 Week 4

第四次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 20 日

截止日期 2025 年 3 月 20 日晚 24 点

1. (1) 请给出一个 3×3 的置换矩阵 P, 使得 $P^3 = E$.
   (2) 请给出一个 4×4 的置换矩阵 $\hat{P}$, 使得 $\hat{P}^4 \neq E$.

   解答.

   - 令 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $P^3 = I$.
   - 令 $\hat{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\hat{P}^4 \neq I$.

   □

   注 0.1

   本题的目的在于意识到并不是 $n \times n$ 的矩阵一定满足 $P^n = I$，而是只能证明存在一个 k 使得 $P^k = I$。完整的刻画需要一些群论的知识。

2. 假设 $n \times n$ 的矩阵 Q 满足：$Q^{-1} = Q^T$:

   (1) 证明 Q 中的列向量 $q_1, \ldots, q_n$ 都是单位向量，即 $\|q_i\| = 1$.
   (2) 证明 Q 中的列向量 $q_1, \ldots, q_n$ 两两正交，即 $q_i^T q_j = 0$ 对任意的 $i \neq j$ 都成立.
   (3) 令 $n = 2$，并且 $Q(1,1) = \cos\theta$，求 Q.

   解答.

   - 注意到:
   $$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \iff Q^T = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}$$
   从而由 $Q^T Q = I$ 可得:
   $$\text{对任意 } i \in n \text{ 有：} 1 = I(i,i) = Q^T Q(i,i) = q_i^T q_i = \|q_i\|^2$$
   即：$\|q_i\| = 1$.

- 只需注意到对任意的 $i \neq j$ 有:

$$0 = I(i,j) = Q^T Q(i,j) = q_i^T q_j$$

即: $q_i^T q_j = 0$.

- $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$

□

3. 课上我们介绍了由 $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 构成的函数集合 F，并定义了其上的加法和数乘运算:

- 给定 $f_1, f_2 \in F$，定义函数 $f_1 + f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义函数 $cf : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

请根据定义验证 F 构成一个向量空间。

解答. 我们依次验证向量空间的定义:

(1) 对任意 $f_1, f_2 \in F, \lambda \in \mathbb{R}$，$g = f_1 + f_2, h = \lambda f$ 依旧是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，从而 $g, h \in F$，即 F 对加法和数乘封闭。

(2) 对任意 $f_1, f_2 \in F, x \in \mathbb{R}$，有:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_2 + f_1)(x) = f_2(x) + f_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

即加法交换律成立。

(3) 对任意 $f_1, f_2, f_3 \in F, x \in \mathbb{R}$，有:

$$((f_1 + f_2) + f_3)(x) = (f_1 + f_2)(x) + f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$(f_1 + (f_2 + f_3))(x) = f_1(x) + (f_2 + f_3)(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

即加法结合律成立。

(4) 定义函数 $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ 为 $\mathbf{0}(x) \equiv 0$，则对任意 $f \in F, x \in \mathbb{R}$，有:

$$(f + \mathbf{0})(x) = (f(x) + \mathbf{0}(x)) = (f(x) + 0) = f(x)$$

即存在零向量 (零元)。

(5) 对任意 $f \in F$，定义函数 $-f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为 $(-f)(x) = -f(x)$，则对 $x \in \mathbb{R}$:

$$(f + (-f))(x) = (f(x) + (-f)(x)) = f(x) + (-f(x)) = 0$$

即存在逆元。

(6) 对任意 $f \in F, x \in \mathbb{R}$，有:

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$$

即数乘单位元存在。

(7) 对任意 $f \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$，有:

$$\lambda(\mu f)(x) = \lambda(\mu f)(x) = \lambda\mu f(x)$$
$$(\lambda\mu f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda\mu f(x)$$

即数乘结合律成立。

(8) 对任意 $f_1, f_2 \in F, \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$，有:

$$(\lambda(f_1 + f_2))(x) = \lambda(f_1 + f_2)(x) = \lambda(f_1(x) + f_2(x)) = \lambda f_1(x) + \lambda f_2(x)$$
$$(\lambda f_1 + \lambda f_2)(x) = (\lambda f_1)(x) + (\lambda f_2)(x) = \lambda f_1(x) + \lambda f_2(x)$$

即数乘是线性的。

(9) 对任意 $f \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$，有:

$$((\lambda + \mu)f)(x) = (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$
$$(\lambda f + \mu f)(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

即数乘对加法满足分配律。

从而 F 是一个向量空间。 □

注 0.2

验证是不难的，但需要注意到的是符号的区别:

- $(\lambda f)(x)$ 定义的是一个函数 λf，其在 x 处的取值定义为 $\lambda f(x)$.
- $\lambda f(x)$ 则是函数 f 在 x 处的取值乘以 λ.

甄别清楚就可以理解和验证向量空间的定义。

4. 令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子空间:

(1) 证明: $\mathbf{0} \in W$.

(2) 证明: 对任意的 $\boldsymbol{w} \in W$,$-\boldsymbol{w} \in W$.

(3) 进一步验证: W 也构成一个向量空间。

解答.

(1) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，由定义有 $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{w} \in W$.

(2) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，有 $-\boldsymbol{w} = (-1)\boldsymbol{w} \in W$.

(3) 由 $W \subseteq V$ 且 V 是一个向量空间，从而我们有:

(i) 对任意 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R}$，有 $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2, \lambda\boldsymbol{w} \in V$.

(ii) 对任意 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$，有 $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in V$.

(iii) 对任意 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \in W$，有 $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 + (\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3) \in V$.

(iv) 存在 $\mathbf{0} \in V$.

(v) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，存在 $-\boldsymbol{w} \in V$.

(vi) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，有 $1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \in V$.

(vii) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，$\lambda(\mu\boldsymbol{w}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{w} \in V$.

(viii) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，有 $(\lambda + \mu)\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} + \mu\boldsymbol{w} \in V$.

(ix) 对任意 $\boldsymbol{w} \in W$，有 $\lambda(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \lambda\boldsymbol{w}_1 + \lambda\boldsymbol{w}_2 \in V$.

由前两问和子空间的定义（对加法和数乘封闭）可知上述推断中的 V 都可以替换为 W，从而 W 也是一个向量空间。

□

5. 下列 $\mathbb{R}^3$ 的子集中，哪些是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间?

(1) 由所有满足 $b_1 = 2b_2$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。

(2) 由所有满足 $b_1 = 1$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。

(3) 所有满足 $b_1b_2b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

(4) 所有 $(1, 4, 0)$ 和 $(2, 2, 2)$ 的线性组合组成的向量集合。

(5) 所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

(6) 所有满足 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

解答.

(1) 其集合 S 是一个子空间，因为对于任意的 $(b_1, 2b_1, b_3), (c_1, 2c_1, c_3) \in S$ 有:

$$(b_1, 2b_1, b_3)+(c_1, 2c_1, c_3) = (b_1+c_1, 2(b_1+c_1), b_3+c_3) \in S,\ \lambda(b_1, 2b_1, b_3) = (\lambda b_1, 2\lambda b_1, \lambda b_3) \in S$$

(2) 其集合 S 不是一个子空间，因为 $(1, 1, 0) \in S$ 但是 $2(1, 1, 0) = (2, 2, 0) \notin S$.

(3) 其集合 S 不是一个子空间，因为 $(1, 1, 0), (0, 0, 1) \in S$ 但是 $(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \notin S$.

(4) 其集合 S 是一个子空间。

(5) 其集合 S 是一个子空间。

(6) 其集合 S 不是一个子空间，因为 $(1, 2, 3) \in S$ 但是 $(-1)(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \notin S$。

□