线性代数 Week 4

第四次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 14 日

截止日期 2025 年 3 月 20 日晚 24 点

1. (1) 请给出一个 3×3 的置换矩阵 P, 使得 $P^3 = E$.
   (2) 请给出一个 4×4 的置换矩阵 $\hat{P}$, 使得 $\hat{P}^4 \neq E$.
2. 假设 $n \times n$ 的矩阵 Q 满足：$Q^{-1} = Q^T$:
   (1) 证明 Q 中的列向量 $q_1, \ldots, q_n$ 都是单位向量，即 $\|q_i\| = 1$.
   (2) 证明 Q 中的列向量 $q_1, \ldots, q_n$ 两两正交，即 $q_i^T q_j = 0$ 对任意的 $i \neq j$ 都成立.
   (3) 令 $n = 2$，并且 $Q(1,1) = \cos\theta$，求 Q.
3. 课上我们介绍了由 $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 构成的函数集合 F，并定义了其上的加法和数乘运算:
   - 给定 $f_1, f_2 \in F$，定义函数 $f_1 + f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:
   $$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
   - 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义函数 $cf : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:
   $$(cf)(x) = cf(x)$$

   请根据定义验证 F 构成一个向量空间。
4. 令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子空间:
   (1) 证明：$\mathbf{0} \in W$.
   (2) 证明：对任意的 $\boldsymbol{w} \in W$,$-\boldsymbol{w} \in W$.
   (3) 进一步验证：W 也构成一个向量空间。
5. 下列 $\mathbb{R}^3$ 的子集中，哪些是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间?
   (1) 由所有满足 $b_1 = 2b_2$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。
   (2) 由所有满足 $b_1 = 1$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。
   (3) 所有满足 $b_1 b_2 b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。
   (4) 所有 $(1, 4, 0)$ 和 $(2, 2, 2)$ 的线性组合组成的向量集合。
   (5) 所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。
   (6) 所有满足 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。