第五次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 3 日

1. 考察 $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 中的如下两个子集:

   - $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   - $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   分别写出由其生成的最小子空间，即 $\text{span}(S_1)$ 和 $\text{span}(S_2)$。

   解答.

   - 包含矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小子空间就是由其所有线性组合形成的，即:

   $$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   即:$\text{span}(S_1) = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$.

   - $\text{span}(S_2) = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$(也可以写成 $\begin{bmatrix} c+d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ 的形式，但要注意到 c, d 可以是任意的，所以可以直接各用一个任意值来表示 $c+d$ 和 d)

   □

注 0.1

第二问的另一个理解是注意到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以其也可以理解成由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 生成的空间。

2. 在下列向量组中，除去哪个向量后，剩下的向量组所生成的空间与原向量组生成的空间相同?

   - $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$

解答.

- 注意到:
$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$
从而去除这四个向量中的任何一个都不会改变生成的空间。
- 注意到:
$$\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$
从而去除 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$ 中的任何一个都不会改变生成的空间。
- 注意到 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 是线性无关的，从而只有去除 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 才会改变生成的空间。

□

3. 我们在矩阵乘法中提到:

$$AB \text{ 中的每一列都是 } A \text{ 的列的线性组合。}$$

这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。

解答. 考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则有:

$$AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

则 $C(AB)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}=Z$，而 $C(A)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$，所以 $C(AB)\subset C(A)$。 □

4. 请找出下列 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间的一组基:

(1) 所有对角矩阵组成的集合。

(2) 所有对称矩阵 (symmetric matrix, $A^T = A$) 组成的集合。

(3) 所有反对称矩阵 (skew-symmetric matrix, $A^T = -A$) 组成的集合。

解答.

- 对角矩阵是只有对角线 (主) 上有非零元素的矩阵，其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

.

- 对称矩阵是 $A^T = A$ 的矩阵，即要满足 $A(i,j) = A(j,i)$，从而其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

.

- 反对称矩阵是 $A^T = -A$ 的矩阵，即要满足 $A(i,j) = -A(j,i)$，从而其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\right\}$$

.

□

5. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种，如下所示:

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$
$$P_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ P_4=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ P_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

现在考察在 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个“向量”，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题:

(1) 证明 $P_1,\dots,P_5$ 这 5 个矩阵是线性无关的。

(2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 E，从而说明这 6 个矩阵是线性相关的。

解答.

- 令 $c_1, \dots c_5$ 满足:

$$c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4 + c_5P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  记左边的矩阵为 M, 则有:

  - $M(1,1) = 0$ 蕴含 $c_5 = 0$.
  - $M(2,3) = 0$ 和 $c_5 = 0$ 蕴含 $c_3 = 0$.
  - $M(1,2) = 0$ 和 $c_5 = 0$ 蕴含 $c_1 = 0$.
  - $M(2,1) = 0$ 和 $c_1 = 0$ 蕴含 $c_4 = 0$.
  - $M(1,3) = 0$ 和 $c_4 = 0$ 蕴含 $c_2 = 0$.

  从而 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$，即：$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ 线性无关。

- 注意到:

$$P_1 + P_2 + P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E + P_3 + P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  所以我们有

$$E = P_1 + P_2 + P_5 - P_3 - P_4$$

□

注 0.2

第二问其实计算方法是任意的，我们这里列举了一个比较简单的方法。