

第五次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 3 月 21 日

截止日期 2025 年 3 月 27 日晚 24 点1. 考察 $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 中的如下两个子集:

$$\begin{aligned} \bullet S_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \\ \bullet S_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

分别写出由其生成的最小子空间, 即 $\text{span}(S_1)$ 和 $\text{span}(S_2)$ 。

2. 在下列向量组中, 除去哪个向量后, 剩下的向量组所生成的空间与原向量组生成的空间相同?

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \\ \bullet & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \\ \bullet & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. 我们在矩阵乘法中提到：

AB 中的每一列都是 A 的列的线性组合。

这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$ ，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。

4. 请找出下列 $M_{3 \times 3}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间的一组基：

(1) 所有对角矩阵组成的集合。

(2) 所有对称矩阵 (symmetric matrix, $A^T = A$) 组成的集合。

(3) 所有反对称矩阵 (skew-symmetric matrix, $A^T = -A$) 组成的集合。

5. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种，如下所示：

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

现在考察在 $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个“向量”，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题：

- (1) 证明 $P_1, \dots, P_5$ 这 5 个矩阵是线性无关的。
- (2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 E ，从而说明这 6 个矩阵是线性相关的。