线性代数 Week 5

第五次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 21 日

截止日期 2025 年 3 月 27 日晚 24 点

1. 考察 $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 中的如下两个子集:

   - $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   - $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   分别写出由其生成的最小子空间，即 span(S_1) 和 span(S_2)。

2. 在下列向量组中，除去哪个向量后，剩下的向量组所生成的空间与原向量组生成的空间相同?

   - $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   - $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   - $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. 我们在矩阵乘法中提到:

   $$AB \text{ 中的每一列都是 } A \text{ 的列的线性组合。}$$

   这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。

4. 请找出下列 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间的一组基:

   (1) 所有对角矩阵组成的集合。

   (2) 所有对称矩阵 (symmetric matrix, $A^T = A$) 组成的集合。

   (3) 所有反对称矩阵 (skew-symmetric matrix, $A^T = -A$) 组成的集合。

5. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种，如下所示:

$$\mathrm{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \mathrm{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \mathrm{P}_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ \mathrm{P}_4=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ \mathrm{P}_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

现在考察在 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个“向量”，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题:

(1) 证明 $\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_5$ 这 5 个矩阵是线性无关的。

(2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 E，从而说明这 6 个矩阵是线性相关的。