线性代数 Week 6

# 第六次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 19 日

1. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 $A$ 中列空间和行空间的一组基:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}$$

**解答.** $A$ 的列空间的一组基是 $\left\{\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}\right\}$，行空间的一组基是 $\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$。 □

2. 判断下列语句的真假:

- 令 $A$ 是 $m\times n$ 的矩阵，则不在列空间 $\boldsymbol{C}(A)$ 的向量 $b\in\mathbb{R}^m$ 组成的集合也是一个向量空间。
- 如果 $\boldsymbol{C}(A)=\{\mathbf{0}\}$，则 $A$ 是全零矩阵。
- $2A$ 的列空间和 $A$ 的列空间相同。
- $A$ 的列空间和 $A-E$ 的列空间相同。

**解答.**

- 命题是不正确的，考察如下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

其列空间是 $\{c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\mid c\in\mathbb{R}\}$，显然我们有 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\notin C(A)$ 但 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\in C(A)$，即不在 $C(A)$ 的向量 $b\in\mathbb{R}^m$ 上的加法是不封闭的，所以不构成一个向量空间。

- 命题是正确的，因为 $C(A)$ 是所有列的线性组合，所以如果 $C(A)=\{0\}$，那么 $A$ 的所有列都是零向量，即 $A$ 是全零矩阵。
- 命题是正确的，令 $A$ 的列向量为 $a_1,\ldots,a_n$，则 $2A$ 的列向量为 $2a_1,\ldots,2a_n$，显然有:

$$span(\{2a_1,\ldots,2a_n\})=span(\{a_1,\ldots,a_n\})$$

即：$2A$ 的列空间和 $A$ 的列空间相同。

- 命题是不正确的，考虑 $A=E$ 的情况即可。

□

3. 证明矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ 的列空间与矩阵 $A$ 的列空间相等，这里 $A$ 是 $m \times n$ 的矩阵，$B$ 是 $n \times k$ 的矩阵，所以 $C$ 是一个 $m \times (n+k)$ 的矩阵。

**解答.** 令 $A$ 的列向量为 $a_1, \dots, a_n$,令 $AB$ 的列向量为 $b_1, \dots, b_k$,则 $C$ 的列向量为 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k$，并且对于任意的 $b_i$，都存在 $c_{1i}, \cdots, c_{ni}$，使得 $b_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} a_j$，从而:

$$\begin{aligned} C(C) &= span(\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}) \\ &= span(\{a_1, \dots, a_n, \sum_{j=1}^{n} c_{j1} a_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} c_{jk} a_j\}) \\ &= span(\{a_1, \dots, a_n\}) \\ &= C(A) \end{aligned}$$

□

4. 用矩阵的形式给出矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ 消元成上三角矩阵的过程，并给出 $A$ 的 LU 分解。

**解答.** 首先将矩阵 $A$ 的第一列进行消元:

$$E_{31}(-7)E_{21}(-4)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -11 & -12 \end{bmatrix}$$

再将矩阵的第二列对角线之下的元素消元有:

$$E_{32}(-\frac{11}{7})\left(E_{31}(-7)E_{21}(-4)A\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -11 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{bmatrix}$$

从而:

$$A = E_{21}(4)E_{31}(7)E_{32}(\frac{11}{7}) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & \frac{11}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{bmatrix} (= LU).$$

□

5. 这道题我们再来考虑一下向量空间下的一组基。

   (1) 考察一个 $n$ 维向量空间 $V$，其上的两组基分别为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_n$。证明，存在唯一的 $n^2$ 个不全为 0 的实数 $c_{11}, \dots, c_{nn}$ 满足:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= c_{11}\boldsymbol{e}_1 + c_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{f}_2 &= c_{12}\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ &\cdots \\ \boldsymbol{f}_n &= c_{1n}\boldsymbol{e}_1 + c_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

(2) 继续上一问的条件，我们将这些 $c_{ij}$ 看作一个矩阵 C，即：

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

特别的，我们可以如下表示上述基的关系：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

从而矩阵 C 被称作基 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ 的**过渡矩阵**，这里我们可以借助矩阵的乘法来理解上述等式，但是也请注意，$\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{e}_i$ 并不一定是列向量，所以我们不能直接写成矩阵的形式。请证明，C 是一个**可逆矩阵**。

(3) 现在考察 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基：

- $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 和 $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

请写出 $E_1$ 到 $E_2$ 的过渡矩阵。

**注 0.1**

这一道题其实想展示的是，在同一个线性空间中，不同基之间的转换是可以通过一个可逆矩阵来表示的。

**解答.** (1) 存在性由基的定义可得。下证唯一性。对任意 $i \in [n]$，若存在不完全相同的 $c_{1i}, \dots, c_{ni}$ 和 $c'_{1i}, \dots, c'_{ni}$ 满足：

$$\boldsymbol{f}_i = c_{1i}\boldsymbol{e}_1 + c_{2i}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{ni}\boldsymbol{e}_n$$
$$\boldsymbol{f}_i = c'_{1i}\boldsymbol{e}_1 + c'_{2i}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c'_{ni}\boldsymbol{e}_n$$

从而：

$$\boldsymbol{0} = (c_{1i} - c'_{1i})\boldsymbol{e}_1 + (c_{2i} - c'_{2i})\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (c_{ni} - c'_{ni})\boldsymbol{e}_n$$

这意味着 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 线性相关，与其是 V 的一组基矛盾。

(2) 由上面一问的结论可知，存在矩阵 D 满足：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix} D$$

因此：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix} D = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} C\right) D = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} (CD)$$
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} C = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix} D\right) C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix} (DC)$$

由唯一性可得:

$$CD = DC = E$$

由此可知 C 是可逆矩阵。

(3) 注意到:

(i) $$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

(ii) $$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = -\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{5}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

从而 $E_1$ 到 $E_2$ 的过渡矩阵 P 为:

$$P = \begin{bmatrix}-1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

□

**注 0.2**

第三问中,如果大家考虑如下两个矩阵:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

则容易发现:

$$D = CP$$

这实际上就是基的转换类似于矩阵乘法。事实上,令 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 是 V 的一组基,定义 $\boldsymbol{u} \in V$ 关于这组基的矩阵韦 $n \times 1$ 的向量:

$$M(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$$

这里 $c_1, \ldots c_n$ 满足: $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$,则我们有:

$$M(\boldsymbol{f}_i) = c_{1i}M(\boldsymbol{e}_1) + c_{2i}M(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + c_{ni}M(\boldsymbol{e}_n)$$

结合矩阵乘法的性质，即有:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M}(\boldsymbol{f}_1) & \mathrm{M}(\boldsymbol{f}_2) & \cdots & \mathrm{M}(\boldsymbol{f}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}(\boldsymbol{e}_1) & \mathrm{M}(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & \mathrm{M}(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

对应第三问（用 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 将上述两组基转换为矩阵）就是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

正好与矩阵乘法相一致。